

dr inż. Damian Szczech¹⁾
ORCID: 0000-0002-8357-2877

The problem of stress concentration at the corner of composite bars

Problem koncentracji naprężeń w narożu prętów kompozytowych

DOI: 10.15199/33.2026.06.02

Abstract: The article addresses the issue of stress concentration at the corner of composite reinforcement. Due to the weakening effect caused by the bending of the bar at the corner, there is a significant reduction in the shear strength of the reinforcement. The shear capacity of bent FRP bars is analysed in the context of design standards, and in comparison with traditional steel reinforcement.

Keywords: stress concentration; FRP; stirrups, bent strength.

Streszczenie: W artykule przedstawiono problem koncentracji naprężeń w narożu zbrojenia kompozytowego. Ze względu na osłabienie zagięcia pręta w narożu następuje znaczna redukcja nośności zbrojenia na ścinanie. Przeanalizowano nośność pręta zagiętego FRP w świetle norm projektowych, a także w porównaniu z tradycyjnym zbrojeniem stalowym.

Słowa kluczowe: koncentracja naprężeń; FRP; strzemiona, nośność pręta zagiętego.

Shear reinforcement is mobilized only in the tension zone of the beam, and its contribution to the shear capacity depends on the maximum tensile stress it can withstand. In the case of conventional steel reinforcement, it is equal to the yield strength, while in the case of FRP reinforcement, which is linearly elastic up to failure, other phenomena, such as slip and elongation, become more significant. Furthermore, the tensile strength of FRP bars is significantly reduced under the influence of a combination of tensile and shear stresses [1–3].

Consequently, if large tensile stresses develop in the links, failure in the corner anchorages can be expected. The reduction of capacity at the corners of an FRP bar depends on the embedment length-to-diameter ratio, the type of composite, the properties of the binder, and the type of anchorage [4]. The reason for such failure is the concentration of transverse stresses at the corner of FRP bars, which have very low strength due to a highly anisotropic structure in the transverse direction [2, 5–7].

In beams reinforced with FRP bars, bar failure very often occurs due to rupture or delamination at the corner. Local delamination is a clear sign of an impending bar fracture.

The reason for the considerations on the topic of stress concentration at the corner of composite bars was the observed failure of GFRP stirrups at the bend of the transverse reinforcement in the author's own research, concerning the analysis of the shear capacity of beams reinforced longitudinally and transversely with GFRP bars [8, 9]. Photo 1 shows the beam reinforcement after removing the concrete cover. Clear damage to the outer coating of the bar and rupture of the transverse reinforcement at the corner are visible. In other studies, failure of stirrups in the bent part was also found, which was the direct cause of failure of the tested elements due to shear (photo 2).

Zbrojenie na ścinanie jest mobilizowane tylko w strefie rozciągania belki, a jego udział w nośności na ścinanie zależy od maksymalnego naprężenia rozciągającego, które może wytrzymać. W przypadku konwencjonalnego zbrojenia stalowego jest ono równe granicy plastyczności, podczas gdy w przypadku zbrojenia FRP, które jest liniowo sprężyste aż do zniszczenia, bardziej istotne stają się inne zjawiska, takie jak poślizg i wydłużenie. Ponadto, wytrzymałość na rozciąganie prętów FRP jest znacznie zmniejszona pod wpływem kombinacji naprężeń rozciągających i ścinających [1–3]. W konsekwencji, jeśli w łącznikach powstają duże naprężenia rozciągające, to można spodziewać się uszkodzenia w narożnych zakotwieniach. Zmniejszenie nośności w narożnikach pręta FRP zależy od stosunku długości osadzenia do średnicy, rodzaju kompozytu, właściwości spoiwa i rodzaju zakotwienia [4]. Powodem takiego zniszczenia jest koncentracja poprzecznych naprężeń w narożniku prętów FRP, które mają bardzo małą wytrzymałość ze względu na silnie anizotropową budowę w kierunku poprzecznym [2, 5–7].

W belkach zbrojonych prętami FRP bardzo często dochodzi do zniszczenia pręta wskutek zerwania lub rozwarstwienia w narożu. Lokalne rozwarstwienie jest wyraźnym znakiem zbliżającego się pęknięcia pręta. Przyczyną rozważań na temat koncentracji naprężeń w narożniku prętów kompozytowych było zaobserwowane zniszczenie strzemion GFRP w zagięciu zbrojenia poprzecznego w badaniach własnych, dotyczących analizy nośności na ścinanie belek zbrojonych podłużnie i poprzecznie prętami GFRP [8, 9]. Na fotografii 1 pokazano zbrojenie belki po odkuciu otuliny betonowej. Widoczne jest wyraźne uszkodzenie zewnętrznej powłoki pręta oraz zerwanie zbrojenia poprzecznego w narożu. W innych badaniach również stwierdzono zniszczenie strzemion w zagiętej części, co było bezpośrednią przyczyną zniszczenia badanych elementów wskutek ścinania (fotografia 2). Analiza wszystkich wyników badań potwierdziła, że główna różnica zniszczenia belek zbrojonych strzemionami FRP, w porównaniu z belkami

¹⁾ Politechnika Łódzka, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska;
damian.szczech@p.lodz.pl



Photo 1. Stirrups failure in the corner after removal of the concrete cover Photo: author
Fot. 1. Zniszczenie strzemion w narożniku po odkuciu otuliny betonowej Fot: autor

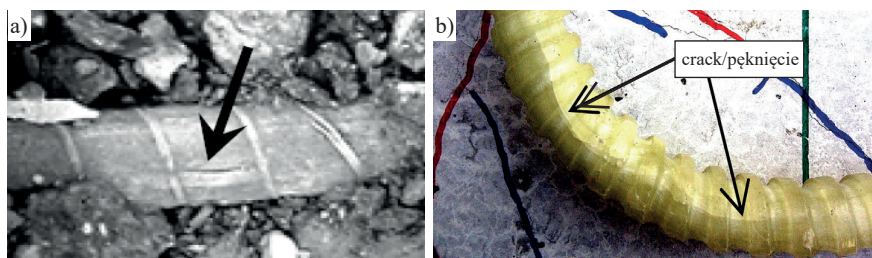


Photo 2. Failure of transverse reinforcement at the corner: a) delamination of bar; b) cracking of stirrup [7, 10]
Fot. 2. Uszkodzenie zbrojenia poprzecznego w narożniku: a) rozwarstwienie pręta; b) pęknięcie strzemienia [7, 10]

The analysis of all test results confirmed that the main difference in the failure of beams reinforced with FRP stirrups, compared to beams reinforced with steel stirrups, lies in the lack of yielding of the FRP reinforcement and in the frequent rupture of stirrups at the corners, which results from the anisotropic nature of the composite reinforcement.

Stresses at the bar corner

The influence of FRP stirrups on the shear capacity of composite bars depends on the stresses in the stirrups. Due to the anisotropic structure of FRP bars, significant stress concentration occurs in their bend in the direction perpendicular to the axis. This makes it so that with low transverse strength, the bar may rupture at the corner [6, 13, 14].

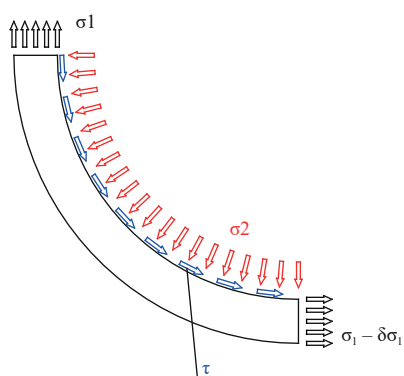
As a result of large tensile stresses in the stirrups σ_1 , large transverse stresses σ_2 caused by the bearing of concrete against the reinforcement and tangential bond stresses τ distributed along the bent part of the bar concentrate at the corner. The stress distribution at the corner is presented in the figure. Bent reinforcement must meet appropriate anchorage conditions, especially in the tension zones of beams, where the stirrup corner is the weakest point. The tensile capacity of FRP bars is significantly reduced when they are subjected to a biaxial stress state.

In the event that the bar breaks at the bend, the tensile stresses carried by the straight section account for a small percentage of the bar's capacity. The reduced capacity at the bend is referred to as the bend strength of the bar, which was described in studies [1–3, 5, 6, 15].

The bend strength of the bar depends primarily on the ratio of the bend radius to the diameter of the bent bar (ACI 440.1R-15, 2015), although other factors also reduce the bend strength of FRP bars [15].

The first of them is caused by defects occurring at the bar manufacturing stage, consisting of the kinking of composite fibers and deformations of its cross-section. The imperfections of the bent part of the stirrup are worsened by the remaining two factors.

The second factor is caused by transverse loading at the bar bend, where diagonal cracking at this location causes the



Stress schematisation in the corner of a bent bar
Układ naprężeń w narożniku zagiętego pręta

zbrojonymi strzemionami stalowymi, polega na braku uplastycznienia zbrojenia FRP oraz na częstym zerwaniu się strzemion w narożnikach, co wynika z anizotropowego charakteru zbrojenia kompozytowego.

Naprężenia w narożu pręta

Wpływ strzemion FRP na nośność na ścinanie prętów kompozytowych zależy od naprężeń w strzemionach. Ze względu na izotropową budowę prętów FRP, w ich zagięciu dochodzi do znacznej koncentracji naprężeń w kierunku prostym do osi. To sprawia, że przy małej wytrzymałości poprzecznej może dojść do zerwania pręta w narożu [6, 13, 14].

W wyniku dużych naprężeń rozciągających w strzemionach σ_1 , w narożu koncentrują się duże poprzeczne naprężenia σ_2 wywołane dociskiem betonu do zbrojenia oraz styczne naprężenia przyczepności τ rozłożone wzdłuż zagiętej części pręta. Rozkład naprężeń w narożu przedstawiono na rysunku. Zbrojenie gięte musi spełniać odpowiednie warunki zakotwienia, szczególnie w rozciąganych strefach belek, gdzie najsłabszym miejscem jest naroże strzemienia. Nośność na rozciąganie prętów FRP jest znacznie zmniejszona, gdy są one poddawane dwuosowemu stanowi naprężenia.

W przypadku, gdy pręt pęka w zagięciu, naprężenia rozciągające przenoszone przez prostą część stanowią mały procent nośności pręta. Zmniejszona nośność w zagięciu określana jest mianem nośności pręta na zginanie (ang. bend strength), co opisano w badaniach [1–3, 5, 6, 15].

Nośność pręta na zginanie zależy przede wszystkim od stosunku promienia gięcia do średnicy pręta giętego (ACI 440.1R-15, 2015), chociaż nośność prętów FRP na zginanie zmniejszają także inne czynniki [16]. Pierwszy z nich spowodowany jest wadami powstałymi na etapie produkcji pręta, polegającymi na złamaniu włókien kompozytowych i deformacjami jego przekroju poprzecznego. Niedoskonałości te pogarszają dwa pozostałe czynniki.

Drugi czynnik spowodowany jest obciążeniem poprzecznym w zagięciu pręta, gdy ukośne zarysowanie w tym miejscu powoduje powstanie naprężeń równoległych do powierzchni pręta oraz naprężeń poprzecz-

occurrence of stresses parallel to the bar surface as well as transverse stresses. The combination of these stresses creates a multi-axial internal stress state along the bar, in which the stresses do not act in the fiber direction. In the event that the capacity along the weaker axis is exceeded, the bar will fail [3, 6, 16].

The third factor is transverse loading resulting from the dowel action of the longitudinal reinforcement, which is associated with the transverse load caused by the displacement of the diagonal crack surfaces. This phenomenon can also occur in the case of straight FRP bars intersected by a diagonal crack. Similarly, if the capacity along the weaker axis is exceeded, the bar will fail [2, 16, 17].

Bent bar capacity

In the corners of FRP stirrups, initial stresses generated during the bend manufacturing stage are present, which reduce its bend capacity at the corner [3]. This depends on the anchorage length-to-diameter ratio, fiber type, bar-to-concrete bond, as well as the type of anchorage. The analysis of this issue is extremely important in the design of structural elements, since in studies many elements fail due to stirrup damage, both in the bent part and in the straight sections of the transverse reinforcement.

The results of Nagasaka's research showed that the shear capacity of beams can be effectively estimated based on the capacity of the bent part of the stirrup [3]. Ahmed demonstrated that the capacity of this part of the bar can range from 40% to 60% of the bar's capacity, depending on its type, which was confirmed by the author's own research, in which the corner strength was at the level of 45% of the capacity of the straight bar section f_{fu} [18]. Shehata showed that the corner capacity is 50% of the tensile strength of the bar itself [6]. Studies by Mochizuki and Ibella showed that stress concentration at the corner of a bent FRP stirrup can reduce the corner capacity to 30% of the total tensile capacity of the bar f_u [19, 20]. Based on these test data, most standard guidelines require that the condition be met that the ratio of the bend radius r_b to its diameter d_b complies with Equation 1:

$$\frac{r_b}{d_b} \leq 3 \quad (1)$$

Researchers Nakamura and Higai conducted theoretical studies on the bend strength of the stirrup corner, basing on Miyata's research [21, 22]. Based on the analysis of the research, they proposed an empirical model to determine the bend strength f_{fb} of a bent FRP bar (Equation 2).

$$f_{fb} = \frac{r_b}{d_b} \cdot \ln \left(1 + \frac{d_b}{r_b} \right) \cdot f_u \quad (2)$$

Similarly, Ishihara proposed Equations 3 and 4 for the capacity of the bent part of an FRP bar based on Ueda's test results [5, 16]. The results of their research showed that the strength of the bar at the bend increases with the bend radius.

$$f_{fb} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 + \lambda) \cdot f_u \quad (3)$$

nych. Połączenie tych naprężeń tworzy wieloosiowy stan naprężeń wewnętrznych wzdłuż pręta, w którym naprężenia nie działają w kierunku włókien. W przypadku, gdy nośność wzdłuż słabszej osi zostanie przekroczona, to pręt ulegnie zniszczeniu [3, 6, 15].

Trzecim czynnikiem jest obciążenie poprzeczne wynikające z klockowania zbrojenia podłużnego (ang. dowel action), co wiąże się z obciążeniem poprzecznym spowodowanym przesuwem powierzchni ukośnej rysy. Zjawisko to może wystąpić również w przypadku prostych prętów FRP przeciętych ukośną rysą. Podobnie, jeśli nośność wzdłuż słabszej osi zostanie przekroczona, to pręt ulegnie zniszczeniu [2, 16, 17].

Nośność pręta zagiętego

W narożnikach strzemion FRP występują pierwotne naprężenia powstałe na etapie wytwarzania zagięcia, które zmniejszają jego nośność na zginanie w narożniku [3]. Zależy to od stosunku długości zakotwienia do średnicy, typu włókien, przyczepności pręta do betonu, a także rodzaju zakotwienia. Analiza tego zagadnienia jest niezwykle istotna w projektowaniu elementów konstrukcyjnych, gdyż w badaniach wiele elementów ulega zniszczeniu wskutek uszkodzenia strzemion, zarówno w części zagiętej, jak i na prostych odcinkach zbrojenia poprzecznego.

Wyniki badań Nagasaki wykazały, że nośność belek na ścinanie może być efektywnie oszacowana na podstawie nośności zagiętej części strzemienia [3]. Ahmed wykazał, że nośność tej części pręta może wynosić 40–60% nośności pręta, w zależności od jego typu, co potwierdziły badania własne, w których wytrzymałość narożnika była na poziomie 45% nośności odcinka prostego pręta f_{fu} [18]. Shehata wykazał, że nośność narożnika wynosi 50% wytrzymałości samego pręta na rozciąganie [6]. Badania Mochizukiego i Ibella wykazały, że koncentracja naprężeń w narożu zagiętego strzemienia FRP może zmniejszyć nośność naroża do 30% całkowitej nośności pręta na rozciąganie f_u [19, 20]. Na podstawie tych danych z badań, większość wytycznych normowych wymaga spełnienia warunku, aby stosunek promienia gięcia pręta r_b do jego średnicy d_b był zgodny ze wzorem 1:

$$\frac{r_b}{d_b} \leq 3 \quad (1)$$

Badacze Nakamura i Higai przeprowadzili teoretyczne badania nośności na zginanie narożnika strzemienia, bazując na badaniach Miyaty [21, 22]. Na podstawie analizy badań zaproponowali empiryczny model do wyznaczenia nośności zagiętego pręta FRP na zginanie f_{fb} (wzór 2).

$$f_{fb} = \frac{r_b}{d_b} \cdot \ln \left(1 + \frac{d_b}{r_b} \right) \cdot f_u \quad (2)$$

Podobnie Ishihara zaproponował wzory 3 i 4 na nośność zagiętej części pręta FRP na podstawie wyników badań Uedy [5, 15]. Wyniki ich badań pokazały, że wytrzymałość pręta w zgięciu zwiększa się z promieniem gięcia.

$$f_{fb} = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 + \lambda) \cdot f_u \quad (3)$$

$$\ln \lambda = 0,90 + 0,73 \cdot \ln \left(\frac{d_b}{r_b} \right) \quad (4)$$

$$\ln \lambda = 0,90 + 0,73 \cdot \ln \left(\frac{d_b}{r_b} \right) \quad (4)$$

Equation 3 is a special case of Equation 2, in which the (d/r) component was replaced. Ishihara's studies showed that the reduction in bend strength at the bar bend is also a function of various types of FRP composites [5]. Furthermore, he suggested that the bond characteristics and differential slip of the FRP bar may play an important role in capacity reduction.

Limiting the strength of transverse bars according to standards

Equation 5 presents the limitation of the tensile strength of transverse bars due to bending through stress reduction and is currently most commonly used in standards and design guidelines (ACI 440.1R-15, 2015) [15].

$$f_{fb} = \left(0,05 \cdot \frac{r_b}{d_b} + 0,03 \right) \cdot f_{fu} \leq f_u, \quad \frac{r_b}{d_b} \geq 3 \quad (5)$$

In the case of $\frac{r_b}{d_b} = 3$ the reduction in the tensile strength of the transverse reinforcement is equal to 45%. This relationship is linear, and the extreme value equal to 100% of the bar's tensile strength is achieved at $\frac{r_b}{d_b} = 14$.

In Annex JA.11.3 to the Eurocode draft CEN/TC 250/S.C. 2/WG 101 N 256 [23], the tensile strength of transverse bars due to bending was defined as f_{fid}^* , determined according to Equation 6 analogously to Equation 5. However, a restriction was introduced regarding $\frac{r_f}{d_f}$ and the bar diameter d_f (Equation 7).

$$f_{fid}^* = \left(0,3 + 0,05 \cdot \frac{r_f}{d_f} \right) \cdot f_{fid} \leq f_{fid} \quad (6)$$

$$3d_f \leq r_f \leq 4d_f \quad \text{and} \quad d_f \leq 25 \text{ mm} \quad (7)$$

The upper limit of the ratio $\frac{r_f}{d_f} = 4$ results in limiting the capacity of bent transverse bars to 50% of the total tensile strength f_{fid} . In the CSA S6-14 standard [24], the same method for determining the f_{fb} value as in the ACI 440.1R standard [15], as adopted, according to Equation 5, but a more conservative safety factor of 1.5 was added.

In the JSCE standard, the stresses at the bend were limited to the value according to Equation 8 [25]. The coefficient $\alpha = 0,05$ corresponds to a 95% confidence limit, and the value $\alpha = 0,092$ to a 50% confidence limit.

$$f_{fb} = \left(\alpha \cdot \frac{r_b}{d_b} + 0,3 \right) \cdot f_u \quad (8)$$

Most models therefore depend primarily on the ratio of the bar's bend radius to its diameter (r/d) , and thus the variability of the composite cross-section, the bar type, and the influence of the bond characteristics between the FRP bar and concrete are neglected.

Influence of other variable parameters

Interesting conclusions were reached by Bentz et al., who tested many beams of different sizes and reinforcement configurations [26]. The authors observed the failure of a beam with

Równanie 3 jest szczególnym przypadkiem równania 2, w którym zastąpiono składową d/r . Badania Ishihary wykazały, że zmniejszenie nośności na zginanie w zagięciu pręta jest również funkcją różnych typów kompozytów FRP [5]. Ponadto zasugerował on, że charakterystyka przyczepności i zróżnicowany poślizg pręta FRP może odgrywać ważną rolę w redukcji nośności.

Ograniczenie wytrzymałości prętów poprzecznych zgodnie z normami

Wzór 5 przedstawia ograniczenie wytrzymałości prętów poprzecznych na rozciąganie ze względu na zagięcie przez zmniejszenie naprężeń i jest obecnie najczęściej stosowany w normach oraz wytycznych projektowych (ACI 440.1R-15, 2015) [16].

$$f_{fb} = \left(0,05 \cdot \frac{r_b}{d_b} + 0,03 \right) \cdot f_{fu} \leq f_u, \quad \frac{r_b}{d_b} \geq 3 \quad (5)$$

W przypadku $\frac{r_b}{d_b} = 3$ redukcja wytrzymałości zbrojenia poprzecznego na rozciąganie jest równa 45%. Zależność ta jest liniowa, a ekstremum równe 100% wytrzymałości pręta na rozciąganie osiągane jest przy $\frac{r_b}{d_b} = 14$. W załączniku JA.11.3 do projektu Eurokodu CEN/TC 250/S.C. 2/WG 101 N 256 [23] określono wytrzymałość prętów poprzecznych na rozciąganie ze względu na zagięcie jako f_{fid}^* , wyznaczanego wg wzoru 6 analogicznie do wzoru 5. Wprowadzono jednak ograniczenie dotyczące $\frac{r_f}{d_f}$ oraz średnicy pręta d_f (wzór 7).

$$f_{fid}^* = \left(0,3 + 0,05 \cdot \frac{r_f}{d_f} \right) \cdot f_{fid} \leq f_{fid} \quad (6)$$

$$3d_f \leq r_f \leq 4d_f \quad \text{and} \quad d_f \leq 25 \text{ mm} \quad (7)$$

Górna granica stosunku $\frac{r_f}{d_f} = 4$ skutkuje ograniczeniem nośności zagiętych prętów poprzecznych do 50% całkowitej wytrzymałości na rozciąganie f_{fid} . W normie CSA S6-14 [24] przyjęto taką samą metodę wyznaczania wartości f_{fb} , jak w normie ACI 440.1R [16], zgodnie ze wzorem 5, ale dodano bardziej konserwatywny współczynnik bezpieczeństwa 1,5. W normie JSCE ograniczono naprężenia w zagięciu do wartości wg wzoru 8 [25]. Współczynnik $\alpha = 0,05$ odpowiada granicy ufności 95%, a wartość $\alpha = 0,092$ granicy ufności 50%.

$$f_{fb} = \left(\alpha \cdot \frac{r_b}{d_b} + 0,3 \right) \cdot f_u \quad (8)$$

Większość modeli zależy więc przede wszystkim od stosunku promienia gięcia pręta do jego średnicy (r/d) , a zatem pomija się zmienność przekroju kompozytu, rodzaj pręta oraz wpływ charakterystyki przyczepności między prętem FRP a betonem.

Wpływ innych parametrów zmiennych

Do ciekawych wniosków doszli Bentz i inni, którzy przebadali wiele belek o różnych rozmiarach i układach zbrojenia [26]. Autorzy zaobserwowali zniszczenie belki z jedną warstwą zbrojenia zginającego w wyniku pęknięcia strzemienia w zagięciu. Belka ta miała odpowiednik z czterema warstwami

a single layer of flexural reinforcement as a result of stirrup fracture at the bend. This beam had a counterpart with four layers of flexural reinforcement, and its failure in shear was observed due to the rupture of the straight part of the stirrup above the upper layer of the longitudinal reinforcement. The studies showed that the shear stresses in the beam with four layers of flexural reinforcement were highest in the upper part of the cross-section and rapidly decreased to zero at the depth of the longitudinal reinforcement layers. In the case of the beam with a single layer of flexural reinforcement, the shear stresses in the transverse reinforcement were highest at the location of the stirrup bend, near the position of the single layer of longitudinal reinforcement. The authors of the studies pointed out the need to design beams with FRP reinforcement in multiple layers, in order to protect the weakening in the stirrup bends in this way [26].

According to Yuan and Wang, stirrups made of strips precisely bent at the corner are characterized by a higher capacity at the corner than the bent part of stirrups manufactured by the pultrusion method [27]. Furthermore, the flexibility of hand-made strip stirrups facilitates the execution of shear reinforcement of any inclination, thanks to which the shear reinforcement can be effectively used to carry shear stresses, as well as reduce the width of diagonal cracks and improve the serviceability of the element. In the winding process, the fibers in the bent part are less kinked, and the rectangular cross-section of the strip reduces the thickness-to-bend radius ratio of the stirrups, which mitigates the stress concentration at the bend. The results of some studies showed that hand-made stirrups in the form of strips can replace conventional FRP stirrups in beams with a short span [28–29].

Lee proposed a modification of Equation 8, additionally taking into account the equivalent diameter in the case of a rectangular cross-section of stirrups (Equation 9) in the form of strips with a thickness of t_f (Equation 10) [28].

$$f_{fb} = \frac{\left(0,02 \cdot \frac{r_b}{d_b} + 0,47\right) \cdot f_{fu}}{F_s} \leq f_u \quad (9)$$

$$d_{fi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot t_f \quad (10)$$

In Equation 9, a safety factor F_s , was additionally introduced, which assumes different values in the standards adapting it ($F_s=1,5$ in the ACI 440.1R-15 and CAN/CSA S6-06 standards, and $F_s=1,3$ in JSCE) [15, 24–25].

Recent studies by Imjai showed that Equations 2–8 do not accurately reflect the data from experimental research; therefore, Imjai proposed new equations based on macromechanics (Equations 11 and 12), which more accurately determine the bend strength of a bent bar [30].

$$f_{fb} = k \cdot f_{fu} \quad (11)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\xi \cdot \frac{1}{r}\right) + \left(\xi \cdot \frac{1}{r}\right)^2 \cdot \beta^2}} \quad (12)$$

The coefficient k assumes values in the range of 0.25–0.70 and depends on Equation 12. In this model, the coefficient k is directly derived from the Tsai-Hill failure criterion [31]. The

zbrojenia zginanego i zaobserwowano jej zniszczenie przy ścinaniu wskutek zerwania prostej części strzemienia powyżej górnej warstwy zbrojenia podłużnego. Badania wykazały, że naprężenia ścinające w belce z czterema warstwami zbrojenia zginanego były największe w górnej części przekroju poprzecznego i gwałtownie zmniejszały się do zera na głębokości warstw zbrojenia podłużnego. W przypadku belki z jedną warstwą zbrojenia zginanego, naprężenia ścinające w zbrojeniu poprzecznym były największe w miejscu zagięcia strzemion, w pobliżu położenia pojedynczej warstwy zbrojenia podłużnego. Autorzy badań wskazali na potrzebę projektowania belek ze zbrojeniem FRP w wielu warstwach, aby chronić w ten sposób osłabienie w zagięciach strzemion [26].

Według Yuana i Wanga, strzemiona wykonane z taśm precyzyjnie zagiętych w narożniku charakteryzują się większą nośnością w narożniku niż zagięta część strzemion wykonanych metodą pultruzji [27]. Ponadto, elastyczność ręcznie wykonywanych strzemion paskowych ułatwia wykonanie zbrojenia na ścinanie o dowolnym nachyleniu, dzięki czemu można efektywnie wykorzystać zbrojenie na ścinanie do przenoszenia naprężeń ścinających oraz zmniejszyć szerokość ukośnych rys i poprawić użyteczność elementu. W procesie nawijania, włókna w części zgiętej są mniej zagięte, a prostokątny przekrój taśmy zmniejsza stosunek grubości do promienia gięcia strzemion, co łagodzi koncentrację naprężeń w zgięciu. Wyniki niektórych badań wykazały, że ręcznie wykonane strzemiona w formie taśm mogą zastąpić konwencjonalne strzemiona FRP w belkach o małej rozpiętości [28, 29].

Lee zaproponował modyfikację wzoru 8, uwzględniając dodatkowo ekwiwalentną średnicę, w przypadku prostokątnego przekroju poprzecznego strzemion (wzór 9) w postaci pasków o grubości t_f (wzór 10) [28].

$$f_{fb} = \frac{\left(0,02 \cdot \frac{r_b}{d_b} + 0,47\right) \cdot f_{fu}}{F_s} \leq f_u \quad (9)$$

$$d_{fi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot t_f \quad (10)$$

We wzorze 9 wprowadzono dodatkowo współczynnik bezpieczeństwa F_s , który przybiera różne wartości w adaptujących go normach ($F_s=1,5$ w normach ACI 440.1R-15, CAN/CSA S6-06 oraz $F_s=1,3$ w JSCE) [16, 24, 25].

Ostatnie badania Imjaia wykazały, że równania 2–8 nie odzwierciedlają najdokładniej danych z badań doświadczalnych, dlatego Imjai zaproponował nowe równania bazujące na makromechanice (wzory 11 i 12), które dokładniej określają nośność na zginanie zagiętego pręta [30].

$$f_{fb} = k \cdot f_{fu} \quad (11)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\xi \cdot \frac{1}{r}\right) + \left(\xi \cdot \frac{1}{r}\right)^2 \cdot \beta^2}} \quad (12)$$

Współczynnik k przyjmuje wartości w przedziale 0,25–0,70 i zależy od wzoru 12. W modelu tym współczynnik k jest wprost wyprowadzony z kryterium zniszczenia Tsai-Hill [31]. Współczynnik β jest stosunkiem wytrzymałości na rozciąganie pręta

coefficient β is the ratio of the tensile strength of the bar along the fibers f_{fu} to the transverse compressive strength of the FRP bar f_{ct} . Based on the analyses, Imjai found that in a significant number of cases, the equations contained in the JSCE guidelines overestimate the bend capacity of FRP bars, with the ratio of the theoretical to experimental value (f_{fb}/f_{test}) being equal to 1.02 with a standard deviation of $\sigma = 0,27$. The proposed Imjai model, based on the Tsai-Hill failure criteria, predicted the experimental results more accurately, with $f_{fb}/f_{test} = 1,00$ at a smaller scatter of $\sigma = 0,25$ [25, 30, 31].

Requirements regarding the bending diameter of steel reinforcement

For the purpose of comparison, the table presents the minimum internal bending diameters of steel reinforcement according to the PN-EN 1992-1-1 standard, due to the strength of steel, and the bearing of the reinforcement against concrete [32].

From many standard requirements, it follows that the bending diameter of FRP bars cannot be less than 6ϕ (Equation 1) [15, 23–25]. In the GFRP stirrups used in the author's own research [8, 9] the internal bending diameters adopted by the manufacturer of the composite bars were equal to, respectively: $7,5\phi$ in the case of stirrups with a diameter of 8 mm and 7ϕ for stirrups with a diameter of 12 mm. Despite adopting a significantly larger bending diameter than for traditional steel bars, and also fulfilling the conditions imposed on the bending of composite bars in standards, the transverse reinforcement underwent failure at the corner of the reinforcement (figure 1) due to significant stress concentration and weakening of the composite reinforcement.

Comparing the requirements imposed on traditional steel bars and composite bars, in the case of FRP bars, they are much more stringent. Detailing transverse reinforcement from composite fibers is therefore much more troublesome and requires more space in the cross-section.

Summary

The issue of stress concentration is extremely important from the point of view of the capacity of the bent part of stirrups, and thus the shear capacity of the transverse reinforcement. As follows from the conducted experimental research, the limitation of the bar capacity at the bend does not allow for full utilization of the stirrup capacity. Researchers recommend the use, as a design parameter, of a maximum strength equal to 40–50% of the guaranteed uniaxial strength of the composite.

The problem of stress concentration in the bent part of the FRP composite reinforcement is significantly more difficult than in the case of steel bars. Despite fulfilling much more stringent conditions regarding non-metallic reinforcement, in

wzdłuż włókien f_{fu} do wytrzymałości na ściskanie poprzeczne pręta FRP f_{ct} . Na podstawie analiz Imjai stwierdził, że w znacznej liczbie przypadków, równania zawarte w wytycznych JSCE zawyżają nośność prętów FRP na zginanie, przy czym stosunek wartości teoretycznej do doświadczalnej (f_{fb}/f_{test}) jest równy 1,02 przy odchyleniu standardowym $\sigma = 0,27$. Zaproponowany model Imjaia, bazujący na kryteriach zniszczenia Tsai-Hilla, przewidywał dokładniej wyniki eksperymentalne $f_{fb}/f_{test} = 1,00$ przy mniejszym rozrzucie $\sigma = 0,25$ [25, 30, 31].

Wymagania dotyczące średnicy gięcia zbrojenia stalowego

W celu porównania, w tabeli przedstawiono minimalne średnice wewnętrzne gięcia zbrojenia stalowego wg normy PN-EN 1992-1-1, ze względu na wytrzymałość stali, oraz docisk zbrojenia do betonu [32].

Z wielu warunków normowych wynika, że średnica gięcia prętów FRP nie może być mniejsza niż 6ϕ (wzór 1) [16, 23–25]. W strzemionach GFRP, użytych w badaniach własnych [8, 9], przyjęte przez producenta prętów kompozytowych wewnętrzne średnice gięcia były równe odpowiednio: $7,5\phi$ w przypadku strzemion o średnicy 8 mm i 7ϕ – strzemion o średnicy 12 mm. Mimo przyjętej znacznie większej średnicy gięcia niż tradycyjnych prętów stalowych, a także spełnieniu warunków stawianych zagięciu prętów kompozytowych w normach, zbrojenie poprzeczne ulegało zniszczeniu w narożniku zbrojenia (rysunek) wskutek znacznej koncentracji naprężeń i osłabieniu zbrojenia kompozytowego.

Porównując wymagania stawiane tradycyjnym prętom stalowym i prętom kompozytowym, w przypadku prętów FRP są one dużo bardziej rygorystyczne. Konstruowanie zbrojenia poprzecznego z włókien kompozytowych jest zatem dużo bardziej kłopotliwe i wymaga więcej miejsca w przekroju poprzecznym.

Podsumowanie

Zagadnienie koncentracji naprężeń jest niezwykle istotne z punktu widzenia nośności zagiętej części strzemion a tym samym nośności zbrojenia poprzecznego na ścinanie. Jak wynika z przeprowadzonych badań doświadczalnych, ograniczenie nośności pręta w zagięciu nie pozwala na pełne wykorzystanie nośności strzemion. Badacze zalecają stosowanie, jako parametru projektowego, maksymalnej wytrzymałości równej 40–50% gwarantowanej wytrzymałości jednoosiowej kompozytu.

Problem koncentracji naprężeń w zagiętej części zbrojenia kompozytowego FRP jest znacznie trudniejszy niż w przypadku prętów stalowych. Pomimo spełnienia dużo bardziej rygorystycznych warunków, dotyczących zbrojenia niemetalicznego, w wielu przypadkach elementy konstrukcyjne ulegają zniszczeniu wskutek

Minimum internal bending diameter
Minimalne wewnętrzne średnice zagięcia

Bar diameter/ Średnica pręta	Minimum bending diameter/ Minimalna średnica zagięcia
$\phi \leq 16 \text{ mm}$	4ϕ
$\phi > 16 \text{ mm}$	7ϕ
$\phi_{m,min} \geq \frac{F_{bt}}{f_{cd}} \left(\frac{1}{a_b} + \frac{1}{2\phi} \right)$	

Oznaczenia: F_{bt} – siła rozciągająca w strzemionach; f_{cd} – obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie; a_b – odległość między osiami prętów

many cases structural elements undergo failure due to shear because of the destruction of the bent part of the bar or the rupture of the reinforcement at the corner.

Considerations on the topic of stress concentration at the corner of composite bars inspired me to conduct a larger number of experimental studies concerning the capacity reduction of the bent part of composite bars, as well as a deeper analysis of the influence of variable parameters, including the method of anchoring the stirrups at the corner, on their capacity.

Received: 02.03.2026

Revised: 09.04.2026

Published: 24.06.2026

ścinania z powodu zniszczenia zagiętej części pręta lub zerwania zbrojenia w narożniku.

Rozważania na temat koncentracji naprężeń w narożu prętów kompozytowych zainspirowały mnie do przeprowadzenia większej liczby badań doświadczalnych dotyczących redukcji nośności zagiętej części prętów kompozytowych, a także głębszej analizy wpływu parametrów zmiennych, w tym sposobu zakotwienia strzemion w narożu, na ich nośność.

Artykuł wpłynął do redakcji: 02.03.2026 r.

Otrzymano poprawiony po recenzjach: 09.04.2026 r.

Opublikowano: 24.06.2026 r.

Literature

- [1] Eshani MR, Saadatmanesh H, Tao S. "Bond of Hooked Glass Fiber Reinforced Plastic (GFRP) Reinforcing Bars to Concrete." *Materials Journal*, (1995) 122 (3), 247–257.
- [2] Maruyama K, Zhao W. "Flexural and Shear Behavior of Concrete Beams Reinforced by FRP Rods." *Inter. Conf. on Corrosion and Corrosion Protection of Steel in Concrete*, Sheffield (1994) p. 1330–1339.
- [3] Nagasaka T, Fukuyama H, Tanigaki M. "Shear performance of concrete beams reinforced with FRP stirrups." *Special publication* (1993) 138 789–812.
- [4] Pilakoutas K. CIV4170/6170 FRP Composites in Construction. The University of Sheffield.
- [5] Ishihara K, Obara T, Sato Y, Ueda T, Kakuta Y. "Evaluation of Ultimate Strength of FRP Rods at Bent-up Portion." *Proceedings of the 3rd International Symposium on Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures*, Sapporo, Japan, (1997) 2: 27–34.
- [6] Shehata E, Morphy R, Rizkalla S. "Fibre Reinforced Polymer Shear Reinforcement for Concrete Members: Behaviour and Design Guidelines." *Canadian Journal of Civil Engineering*, (2000) 27 p. 859–872.
- [7] Matta F, Nanni A, Galati N, Mosele F. "Size effect on shear strength of concrete beams reinforced with FRP bars." *Proc. of the 6th Inter. Conf. on FraMCoS*, (2007) Vol. 2, pp. 17–22.
- [8] Szczech D, Kotynia R. "Shear tests on GFRP reinforced concrete beams." 10th International Conference on AMCM. MATEC Web od Conf. (2020) Vol. 323.
- [9] Szczech D. Rozprawa doktorska (2023) „Analiza wpływu rodzaju zbrojenia na nośność ścinania betonowych belek ze zbrojeniem poprzecznym” Politechnika Łódzka, Łódź, 2023.
- [10] Krall M, Polak MA. Concrete beams with different arrangements of GFRP flexural and shear reinforcement. *Engineering Structures*, 2019;198 (5): 109333.
- [11] Bywalski C, Drzazga M, Kaźmierowski M, Kamiński M. "Shear Behavior of Concrete Beams Reinforced with a New Type of Glass Fiber Reinforced Polymer Reinforcement: Experimental Study." *Materials*. 2020; 13 (5): 1159.
- [12] Huang Z, Chen W, Hao H, Chen Z, Pham T, Tran T, Elchalakani M. "Shear behaviour of ambient cured geopolymer concrete beams reinforced with BFRP bars under static and impact loads" *Engineering Structures* (2021) 231: 111730
- [13] Whitehead PA, Ibell TJ. "Novel shear reinforcement for fiber reinforced polymer reinforced and prestressed concrete." *ACI Structural Journal* (2005) 102 (2): 286–94.
- [14] Kim H, Him MS, Ko MJ, Lee YH. "Shear behavior of concrete beams reinforced with GFRP shear reinforcement." *International Journal of Polymer Science* (2015) 1–8.
- [15] Ueda T, Sato Y, Kakuta Y, Imamura A, Kanematsu H. "Failure Criteria for FRP rods Subjected to a Combination of Tensile and Shear Forces." *Proc. of FRPRCS-2* (1995) p. 26–33.
- [16] ACI 440.1R-15 (2015) Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars, American Concrete Institute.
- [17] Kanematsu H, Sato Y, Ueda T, Kakuta Y. "A study on failure criteria of FRP rods subject to tensile and shear force." *Proceedings of the FIP'93 symposium – modern prestressing techniques and their applications*. Tokyo: Japan Prestressed Concrete Engineering Association (1993) vol. 2., p. 743–50.
- [18] Ahmed EA, El-Salakawy EF, Benmokrane B. "Performance Evaluation of Glass Fiber-Reinforced Polymer Shear Reinforcement for Concrete Beams" *ACI Structural Journal* (2010) 107-S06.
- [19] Mochizuki S, Matsuzaki Y, Sugita M. "Evaluation Items and Methods of FRP Reinforcement as Structural Elements." *Fiber-Reinforced-Plastic Reinforcement for Concrete Structures: International Symposium, SP-138*, American Concrete Institute, Farmington Hills (1993) p. 117–131.
- [20] Ibell T, Burgoyne J. "Use of Fiber-Reinforced Plastics Versus Steel for Shear Reinforcement of Concrete," *ACI Structural Journal*. (1999) V. 96, No. 6, pp. 997–1002.
- [21] Nakamura H, Higai T. „Evaluation of shear strength of concrete beams reinforced with FRP." *Concrete Library of JSCE* (1995) No. 508/V-26: 111–123.
- [22] Miyata S, Tottori S, Terada T, Sekijima K. "Experimental study on tensile strength of FRP bent bar." *Transactions of the Japan Concrete Institute* (1989) 11, 185–191.
- [23] CEN (2017) CEN/TC 250/SC 2/WG 1/TG 1 N 110 Draft Reinforcing With FRP.
- [24] CAN/CSA-S806-12 (2012) Design and construction of building structures with fibre-reinforced polymers, Canadian Standards Association, Ontario, Canada.
- [25] JSCE (1997) Recommendation for design and construction of concrete structures using continuous fiber reinforcing materials. (Concrete Engineering Series JSCE).
- [26] Bentz EC, Massam L, Collins MP. „Shear strength of large concrete members with FRP reinforcement." *Journal of Composites for Construction* (2010) 14 (6), 637–646.
- [27] Yuan Y, Wang Z. (2019) "Shear behavior of large-scale concrete beams reinforced with CFRP bars and handmade strip stirrups." *Composite Structures* 227.
- [28] Lee C, Kim J, Heo S. "Experimental observation on the effectiveness of fiber sheet strip stirrups in concrete beams." *Journal of Composites for Construction* (2010) 14 (5): 487–97.
- [29] Spadea S, Orr J, Ivanova K. "Bend-strength of novel filament wound shear reinforcement." *Composite Structures* (2017) 176:244–53.
- [30] Imjai T. (2007) "Design and analysis of curved FRP composites as shear reinforcement for concrete structures." *Dissertation PhD thesis*, The University of Sheffield, Dept. of Civil and Structural Engineering, Sheffield, UK.
- [31] Bright RJ, Sumathi M. (2017) "Failure Analysis of FRP Composite Laminates Using Progressive Failure Criteria." *International Journal of Scientific & Engineering Research* 8.
- [32] PN-EN 1992-1-1 (2008) Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.