

dr inż. Inez Kamińska^{1*)}

ORCID: 0000-0003-1421-6841

mgr inż. Szymon Spodzieja¹⁾

ORCID: 0000-0001-5049-8837

inż. Krzysztof Daniluk²⁾

Static calculations of Klein slabs of historic buildings

Obliczenia statyczno-wytrzymałościowe stropów Kleina w zabytkowych obiektach budowlanych

DOI: 10.15199/33.2025.12.20

Abstract. Klein slabs, found in historic buildings, were designed using the allowable stress method. During the assessment of technical condition and any necessary maintenance, calculations are performed according to current design codes. This paper presents a verification scheme for Klein slabs of typical dimensions. For ceramic slabs, we provide representative strain and stress distributions at the ultimate limit state, as well as formulas for load-bearing capacity depending on the slab type (lightweight, semi-heavy, heavy). All relationships are illustrated with examples from the technical report of the building at Starynkiewicza Square in Warsaw.

Keywords: Klein slab; static calculations; ultimate limit state; serviceability limit state.

Streszczenie. Stropy Kleina, występujące w budynkach historycznych, były projektowane różnymi metodami, bazującymi na aktualnych wtedy normach. Podczas oceny stanu technicznego i ewentualnej konserwacji wykonuje się obliczenia wg aktualnych wytycznych normowych. W artykule przedstawiono schemat sprawdzeń stropów Kleina o typowych wymiarach. W przypadku płyt ceramicznych podano reprezentatywne rozkłady odkształceń i naprężeń w stanie granicznym nośności oraz wzory na nośność w zależności od rodzaju płyty (lekka, półciężka, ciężka). Wszystkie zależności zostały zilustrowane przykładami pochodzącymi z ekspertyzy budynku przy placu Starynkiewicza w Warszawie.

Słowa kluczowe: strop Kleina; obliczenia statyczno-wytrzymałościowe; stan graniczny nośności; stan graniczny użyteczności.

The Klein slab was patented at the end of the 19th century and was mainly used in buildings constructed until the 1950s as a convenient replacement for wooden ceilings [1]. Klein plates were designed using various methods [2], including the working stress design method [3]. The aim of this work is to present a scheme for static calculations of such slabs in the light of current design codes [4, 5], which may be useful when assessing the condition of the structure and in the revitalization process.

Klein slabs are composed of steel I-beams of height 12 – 30 cm and a reinforced ceramic slab [1, 6, 7] (Figure 1). As an alternative to I-beams, standard-gauge railway rails from dismantled tracks were also used. The span of such ceilings is usually no greater than 6 m, with the steel beam spacing ranging from 0,9 ÷ 1,9 m. The permissible load ranges from 0,75 – 6 kN/m² in addition to the weight of the ceiling structure itself.

Depending on the arrangement of bricks in the slab, **heavy slabs** (bricks laid in a seam pattern); **semi-heavy slabs** (two bricks in a seam pattern, two laid flat) and **light slabs** (bricks laid flat) are distinguished, as shown in Figure 2. Lightweight slabs are usually used for structures under unused attics, while semi-heavy or heavy slabs are used in other parts of the building [7]. Brick slabs are reinforced, usually every second or third joint, with flat bars, from 1 x 20 to 2 x 30, or steel rods (usually $\phi 6$ or $\phi 8$). Ceramic slabs were made of solid or perforated brick of dimensions 250 x 120 x 65 mm, and in old brick structures also 270 x 130 x 60 mm [1].

Strop Kleina został opatentowany w końcu XIX wieku i był stosowany głównie w budynkach powstających do lat pięćdziesiątych XX wieku jako wygodny zamiennik stropów drewnianych [1]. Płyty Kleina projektowano z wykorzystaniem różnych metod [2], m.in. metody naprężeń dopuszczalnych [3]. W artykule przedstawiono schemat obliczeń statyczno-wytrzymałościowych takich stropów w świetle aktualnych norm [4, 5], co może być przydatne podczas oceny stanu konstrukcji i w procesie rewitalizacji.

Stropy Kleina (rysunek 1) są złożone z dwuteowników stalowych o wysokości 12 – 30 cm oraz ceramicznej płyty zbrojonej [1, 6, 7]. Zamiast dwuteowników stosowano również szyny kolejowe normalnotorowe pochodzące z rozbiórki torów. Rozpiętość takich stropów jest zwykle nie większa niż 6 m, przy czym rozstaw belek stalowych wynosi 0,9 ÷ 1,9 m, a dopuszczalne obciążenie 0,75 – 6 kN/m² ponad ciężar samej konstrukcji stropu.

W zależności od ułożenia cegieł w płycie wyróżnia się **stropy: ciężkie** (cegły ułożone „na rąb”); **półciężkie** (dwie cegły „na rąb”, dwie „na płask”) oraz **lekkie** (cegły ułożone „na płask”), co przedstawiono na rysunku 2. Stropy lekkie są zwykle stosowane pod poddaszami nieużytkowymi, natomiast w pozostałych partiach budynku używane są stropy półciężkie albo ciężkie [7]. Płyty ceglane są zbrojone płaskownikami o przekroju od 1 mm x 20 mm do 2 mm x 30 mm, lub prętami stalowymi ($\phi 6$ lub $\phi 8$) zwykle co drugą lub co trzecią spoinę. Płyty ceramiczne były wykonywane z cegły pełnej lub dziurawki o wymiarach 250 x 120 x 65 mm, a w konstrukcjach ze starej cegły także 270 x 130 x 60 mm [1].

Obliczenia statyczno-wytrzymałościowe polegają na sprawdzeniu belek stalowych oraz zbrojonej płyty ceglanej w stanach

¹⁾ Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej

²⁾ PKSS

^{*)} Correspondence address: inez.kaminska@pw.edu.pl

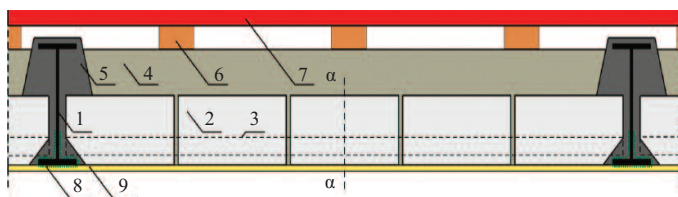


Fig. 1. Typical cross-section Klein slab: 1 – steel I-beam; 2 – brick; 3 – brick slab reinforcement (flat bars or rods); 4 – lightweight concrete; 5 – concrete or mortar; 6 – wooden joists; 7 – floor layers; 8 – Rabitz grid; 9 – plaster

Rys. 1. Typowy przekrój stropu Kleina: 1 – dwuteownik stalowy; 2 – cegła; 3 – zbrojenie płyty ceglanej (płaskowniki lub pręty); 4 – beton lekki; 5 – beton lub zaprawa; 6 – legary drewniane; 7 – warstwy podłogi; 8 – siatka Rabitza; 9 – tynk

The static calculations involve verifying steel beams and a reinforced brick slab at their ultimate and serviceability limit states. Checking steel beams is relatively easy, so we limit ourselves to a concise note. Calculations for brick slabs are more complex and require a more detailed commentary. The paper includes formulas for determining the slab cross-sectional load-bearing capacity for typical Klein slabs. The equations are illustrated with working examples, drawn from a technical report on a building at Starynkiewicza Square in Warsaw [8, 9].

Load transfer in the Klein ceiling

In a Klein slab, the live load is transferred from the wooden floor joists through the ceramic slab to the steel beams. These are supported by masonry load-bearing walls. Due to the lack of anchoring, the steel I-beams are assumed to be simply supported. The brick slabs rest on the lower flanges of the I-beams and can also be modeled as simply supported beams (or slabs).

Steel beam calculations. The steel beams of the Klein slabs are subjected to continuous loads. The design moment and maximum deflection are:

$$M_{Ed} = \frac{1}{8} q_{SGN} L_{eff}^2, \quad w_{max} = \frac{5}{384} \frac{q_{SGU} L_{eff}^4}{EI_y} \quad (1)$$

where:

L_{eff} – effective span of the beam;
 q_{SGN} – load at the ultimate limit state;
 q_{SGU} – load at the serviceability limit state;
 EI_y – bending stiffness of the beam.

In the ultimate limit state, it should be checked whether the load-bearing capacity of the steel beam cross-section is sufficient, i.e. whether the condition (6.12) of the 1993-1-1 Eurocode is met [5]:

$$M_{Ed} \leq M_{c,Rd} = \frac{W f_y}{\gamma_{M0}} \quad (2)$$

where:

$M_{c,Rd}$ – the ultimate cross-section capacity in uniaxial bending.

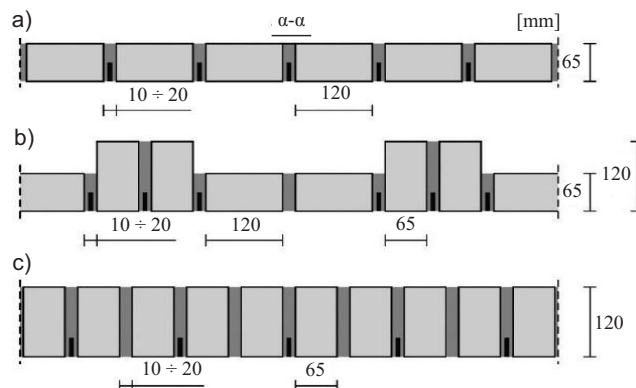


Fig. 2. Ceramic slab cross-section: a) lightweight slab; b) semi-heavy slab; c) heavy slab

Rys. 2. Przekrój przez płytę ceramiczną: a) strop lekki; b) strop półciężki; c) strop ciężki

granicznych nośności i użyteczności. Sprawdzenie belek stalowych jest dosyć łatwe, natomiast obliczenia płyt ceglanych są bardziej złożone i wymagają szerszego komentarza. W artykule zamieszczamy wzory pozwalające wyznaczyć nośność przekroju płyty w przypadku typowych stropów Kleina. Wzory ilustrujemy przykładami obliczeniowymi, które zostały zaczerpnięte z ekspertyzy technicznej konstrukcji budynku przy placu Starynkiewicza w Warszawie [8, 9].

Schemat pracy stropu Kleina

W stropie Kleina obciążenie użytkowe jest przenoszone z legarów drewnianych podłogi przez płytę ceramiczną na belki stalowe, które są podparte na murywanych ścianach nośnych. Ze względu na brak kotwienia zakłada się, że dwuteowniki stalowe mają schemat statyczny belki swobodnie podpartej. Płyty ceglane opierają się na dolnych półkach dwuteowników i również mogą być modelowane belką lub płytą swobodnie podpartą.

Obliczanie belek stalowych. Belki stalowe stropu Kleina są poddane obciążeniom ciągłym. Obliczeniowy moment oraz maksymalne ugięcie to:

$$M_{Ed} = \frac{1}{8} q_{SGN} L_{eff}^2, \quad w_{max} = \frac{5}{384} \frac{q_{SGU} L_{eff}^4}{EI_y} \quad (1)$$

gdzie:

L_{eff} – rozpiętość efektywna belki;
 q_{SGN} – obciążenie w stanie granicznym nośności;
 q_{SGU} – obciążenie w stanie granicznym użyteczności;
 EI_y – sztywność belki na zginanie.

W stanie granicznym nośności należy sprawdzić, czy nośność przekroju belki stalowej jest wystarczająca, to znaczy czy spełniony jest warunek (6.12) z normy 1993-1-1 [5]:

$$M_{Ed} \leq M_{c,Rd} = \frac{W f_y}{\gamma_{M0}} \quad (2)$$

gdzie:

$M_{c,Rd}$ – obliczeniowa nośność przekroju przy jednokierunkowym zginaniu.

Steel beams used in Klein floors usually have cross-sections of class 1 or 2, which implies the use of the plastic section modulus $W = W_{pl}$. If the webs of steel beams are encased in concrete, it can be approximately assumed that the section modulus increases by 25% [10]. In general, steel beams are not required to be checked for lateral warping, as they are braced by the Klein slab structure. However, if the brick slabs are in poor condition, they cannot provide protection against lateral warping, and such a check should be performed [11]. The maximum deflection should not exceed the permissible value:

$$w_{max} \leq w_{lim} = \frac{L_{eff}}{250} \quad (3)$$

The effective span of a beam L_{eff} can be assumed in various ways. The theoretical support point can be assumed to be the center of the I-beam section resting on the wall if the pressure distribution on the wall is approximately uniform (if the length of the wall support is no greater than $150 + h/30$, where h is the beam height expressed in mm) [6, 12]. Alternatively, the effective length of the beam is assumed to be the clear span increased by 5% [3,12].

Example: check of a Klein slab steel beam

The Klein slab beam under consideration is located on the ground floor (excavation A-1(k) [8]). The element material was assumed to be 010 W structural steel, in accordance with PN/B-190 [3], with a yield strength $f_y = 210$ MPa and Young's modulus $E_s = 210$ GPa [13]. The beam is made of a standard German I-beam with a height of 260 mm and a width of 113 mm, and the flange and web thicknesses are equal to 14,1 mm and 9,4 mm, respectively. The moment of inertia is $I_y = 5744$ cm⁴. The cross-section is class 1, so the plastic section modulus $W_{pl} = 508$ cm³ is used for dimensioning in the ultimate limit state. The beams are spaced 1,1 m apart.

The site investigation revealed a semi-heavy steel-ceramic slab made of solid brick, reinforced with 2x30 mm steel flat bars (in each joint). The layer configuration was as follows: cement-lime plaster (2.0 cm), semi-heavy slab (12.0 cm), sand with rubble (5.5 cm), and cement screed (10.0 cm). A listing of the permanent loads acting on the ceramic slab is presented in Table.

Summary of constant loads for a ceramic plate

Zestawienie obciążeń stałych płyty ceramicznej

Load description/Opis obciążenia	Value g_k [kN/m ²]/ Wartość g_k [kN/m ²]
Floor finish – cement screed, 10 cm thick (0,10 • 21)/Warstwa wykończeniowa – wylewka cementowa grubości 10,0 cm (0,10 • 21)	2,10
Sand with rubble, 5,5 cm thick (partially as filling between the ribs/Piasek z gruzem grubości 5,5 cm (częściowo jako wypełnienie pomiędzy żebrami)	1,78
Semi-heavy Klein slab made of solid brick/Płyta stropu Kleina półciężka z cegły pełnej	1,55
Plaster, 2,0 cm thick (0,02 • 19)/Tynk grubości 2,0 cm (0,02 • 19)	0,38
Floor finish + self-weight of the Klein ceiling → Σ =/Warstwy wykończeniowe + ciężar własny stropu Kleina → Σ =	5,81

Belki stalowe, używane w stropach Kleina mają zwykłe przekroje klasy 1 lub 2, co implikuje używanie wskaźnika wytrzymałości przekroju $W = W_{pl}$. W przypadku, gdy środniki belek stalowych są obetonowane, można przyjąć w przybliżeniu, że nastąpiło zwiększenie wskaźnika wytrzymałości o 25% [10]. Belek stalowych nie trzeba sprawdzać na zwichrzenie, ponieważ są stężane przez konstrukcję stropu Kleina, ale jeśli stan płyt ceglanych jest zły, to nie mogą one zapewnić zabezpieczenia przeciw zwichrzeniu i należy takiego sprawdzenia dokonać [11]. Maksymalne ugięcie nie powinno przekraczać dopuszczalnej wartości:

$$w_{max} \leq w_{lim} = \frac{L_{eff}}{250} \quad (3)$$

Rozpiętość efektywna belki L_{eff} może być przyjmowana na różne sposoby. Można założyć, że teoretycznym punktem podparcia jest środek części dwuteownika opartej na ścianie, jeżeli rozkład docisku na ścianę jest w przybliżeniu równomierny (jeśli długość oparcia na ścianie jest nie większa niż $150 + h/30$, gdzie h – wysokość belki wyrażona w mm) [6, 12]. Alternatywnie przyjmuje się, że długość efektywna belki to rozpiętość w świetle powiększona o 5% [3, 12].

Sprawdzenie belki stalowej stropu Kleina

Rozpatrywana belka stropu Kleina znajduje się na partee (odkrywka A-1(k) [8]). Przyjęto, że materiał elementu to stal konstrukcyjna 010 W, zgodnie z PN/B-190 [3], o granicy plastyczności $f_y = 210$ MPa oraz module Younga $E_s = 210$ GPa [13]. Belka jest wykonana z dwuteownika o wysokości 260 mm i szerokości 113 mm, przy grubości półki i środnika równej odpowiednio 14,1 mm oraz 9,4 mm. Moment bezwładności wynosi $I_y = 5744$ cm⁴. Przekrój jest klasy 1, a więc do wymiarowania w stanie granicznym nośności służy wskaźnik plastyczny $W_{pl} = 508$ cm³. Belki są rozstawione co 1,1 m.

W odkrywcę stwierdzono półciężką płytę staloceramyczną z cegły pełnej, zbrojoną bednarką o przekroju 2 x 30 mm w każdej spoinie. Układ warstw to: tynk cementowo-wapienny (2,0 cm), płyta półciężka (12,0 cm); piasek z gruzem (5,5 cm); wylewka cementowa (10,0 cm). Zestawienie obciążeń stałych płyty ceramicznej przedstawiono w tabeli.

The beam is loaded with its own weight of value 0,4192 kN/m, the weight of the Klein slab and floor layers $5,81 \cdot 1,1 = 6,391$ kN/m, and the live load $2 \cdot 1,1 = 2,2$ kN/m. As a result, the loads at the ultimate and serviceability limit states are:

$$\begin{aligned} q_{SGN} &= 1,35 \cdot (6,391 + 0,4192) + 1,5 \cdot 2,2 = 11,5 \text{ kN/m} \\ q_{SGU} &= 6,391 + 0,4192 + 2,2 = 7,91 \text{ kN/m} \end{aligned} \quad (4)$$

The bending resistance of the cross-section, according to (1), is:

$$M_{c,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{508 \cdot 21}{1,0} \cdot 10^{-2} = 106,7 \text{ kNm} \quad (5)$$

The clear span of the beam is $L_0 = 601$ cm, hence the effective length and permissible deflection, calculated from formula (3), are:

$$L_{eff} = 1,05 \cdot 601 = 631 \text{ cm}, \quad w_{lim} = \frac{631}{250} = 2,52 \text{ cm} \quad (6)$$

In the ultimate limit state, the value of the uniform load is $q_{SGN} = 11,5$ kN/m, so the design moment (1) becomes:

$$M_{Ed} = 1/8 \cdot 11,5 \cdot 6,31^2 = 57,2 \text{ kNm} < M_{c,Rd} = 106,7 \text{ kNm} \quad (7)$$

The steel beam carries the given load. The utilization of the beam cross-section is 54%.

In the serviceability limit state the value of the uniform load is $q_{SGU} = 7,91$ kN/m, so the deflection (1) equals:

$$w_{max} = \frac{5}{384} \frac{0,0791 \cdot 631^4}{21000 \cdot 5744} = 1,35 \text{ cm} < 2,52 \text{ cm} \quad (8)$$

Maximum deflections do not exceed the permissible value.

Calculations of a reinforced ceramic plate

For reinforced brick slabs in the ultimate limit state, condition (6.21) of the 1996-1-1 Eurocode must be checked [4]:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \quad (9)$$

where:

M_{Ed} – the design value of the moment on the brick slab.

Our goal is to find the load-bearing capacity of the Klein brick slabs M_{Rd} , shown in Figure 2. We will use the static scheme of a simply supported beam (a repeating segment of a ceramic plate) subjected to a continuous load. Brick plates of the Klein slabs are heavily reinforced structures. Typically, at the ultimate limit state, the brick material fails under compression, but the steel of the flat bars remains elastic, so formulas (6.22) and (6.23) of the code [4] cannot be used. In the calculations we use the standard linear-ideally plastic constitutive relations for both steel and brick (Figure 3). We assume that at the ultimate limit state, the brick carries compressive loads only. For Klein slabs, the ultimate limit state is reached when the strain in the upper fibers of the ceramic slab reaches the limit value ϵ_{mu} . The strains are

Belka jest obciążona ciężarem własnym o wartości 0,4192 kN/m, ciężarem płyty Kleina i warstw podłogowych $5,81 \cdot 1,1 = 6,391$ kN/m oraz obciążeniem użytkowym $2 \cdot 1,1 = 2,2$ kN/m. W efekcie obciążenia w stanach granicznych nośności i użytkowości wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} q_{SGN} &= 1,35 \cdot (6,391 + 0,4192) + 1,5 \cdot 2,2 = 11,5 \text{ kN/m} \\ q_{SGU} &= 6,391 + 0,4192 + 2,2 = 7,91 \text{ kN/m} \end{aligned} \quad (4)$$

Nośność przekroju na zginanie, zgodnie z (1), to:

$$M_{c,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{M0}} = \frac{508 \cdot 21}{1,0} \cdot 10^{-2} = 106,7 \text{ kNm} \quad (5)$$

Rozpiętość belki w świetle wynosi $L_0 = 601$ cm, stąd długość efektywna i dopuszczalne ugięcie, obliczone ze wzoru (3), wynoszą:

$$L_{eff} = 1,05 \cdot 601 = 631 \text{ cm}, \quad w_{lim} = \frac{631}{250} = 2,52 \text{ cm} \quad (6)$$

W stanie granicznym nośności wartość obciążenia równomiernego to $q_{SGN} = 11,5$ kN/m, a więc moment obliczeniowy (1) to:

$$M_{Ed} = 1/8 \cdot 11,5 \cdot 6,31^2 = 57,2 \text{ kNm} < M_{c,Rd} = 106,7 \text{ kNm} \quad (7)$$

Belka stalowa przenosi zadane obciążenie. Wyężenie przekroju wynosi 54%.

W stanie granicznym użytkowości wartość obciążenia równomiernego to $q_{SGU} = 7,91$ kN/m, więc ugięcie (1) wynosi:

$$w_{max} = \frac{5}{384} \frac{0,0791 \cdot 631^4}{21000 \cdot 5744} = 1,35 \text{ cm} < 2,52 \text{ cm} \quad (8)$$

Maksymalne ugięcia nie przekraczają wartości dopuszczalnej.

Obliczenia zbrojonej płyty ceramicznej

W przypadku zbrojonych płyt ceglanych w stanie granicznym nośności trzeba sprawdzić warunek (6.21) normy 1996-1-1 [4]:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \quad (9)$$

gdzie:

M_{Ed} – obliczeniowa wartość momentu na płycie ceglanej.

Naszym celem było znalezienie nośności M_{Rd} płyt ceglanych stropów Kleina przedstawionych na rysunku 2. Zastosowano schemat statyczny belki swobodnie podpartej (segment powtarzalny płyty ceramicznej), obciążonej w sposób ciągły. Płyty ceglane stropu Kleina są konstrukcjami silnie zbrojonymi. W stanie granicznym nośności dochodzi do zniszczenia materiału cegły przy ściskaniu, ale stal płaskowników pozostaje sprężysta, a więc nie można wykorzystać wzorów z normy [4]. W obliczeniach korzystamy z normowych liniowo-idealnie plastycznych relacji konstytutywnych zarówno w przypadku stali, jak i cegły (rysunek 3). Zakładamy, że w stanie granicznym nośności mur przenosi jedynie ściskanie. W przypadku stropów Kleina osiągnięcie stanu granicznego nośności następuje przez osiągnięcie wartości granicznej odkształcenia ϵ_{mu} w górnych włóknach płyty ceramicznej. Odkształce-

distributed linearly, according to the hypothesis of flat cross-sections. Part of the normal stress is described by a linear function (elastic zone), and part is constant (plastic zone). The bending axis of a semi-heavy slab is always located in the flange, but two cases of reaching the ultimate limit state must be considered: when the elastic zone of the brick material remains outside the web (Figure 4b) or when it also includes a part of the web (Figure 4c). The strain and stress diagrams at the instant of reaching ε_{mu} in the top fibers of the plate are shown in Figure 4.

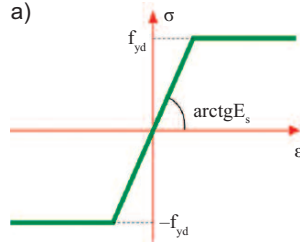
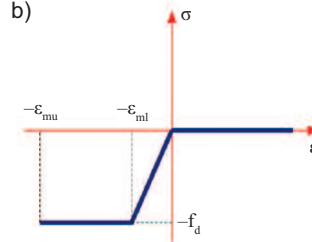


Fig. 3. Analyzed stress-strain relations for: a) steel; b) brick

Rys. 3. Rozpatrywane relacje naprężenie-odkształcenie w przypadku: a) stali; b) cegły



nia rozkładają się liniowo, zgodnie z hipotezą płaskich przekrojów. Część rozkładu naprężenia normalnego jest opisana funkcją liniową (strefa sprężysta), a część funkcją stałą (strefa uplastyczniona). Oś zginania płyty półciężkiej znajduje się zawsze w półce. Należy jednak rozpatrzyć dwa przypadki osiągnięcia stanu granicznego: gdy strefa sprężysta materiału cegły pozostaje poza środkami (rysunek 4b) lub gdy obejmuje także część środka (rysunek 4c). Wykresy odkształcenia i naprężenia w momencie osiągnięcia ε_{mu} w górnych włóknaх płyty przedstawiono na rysunku 4.

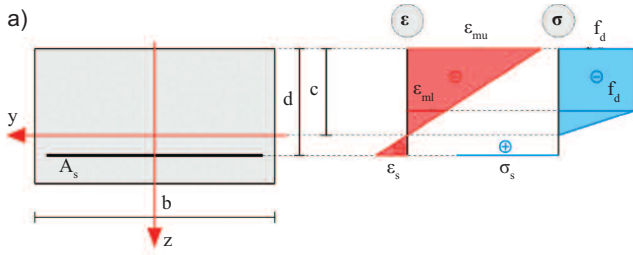


Fig. 4. Strain and stress distributions in the ultimate limit state for Klein slabs: a) lightweight/heavy slab; b) semi-heavy slab, the elastic zone is contained in the flange; c) semi-heavy slab, elastic zone is in the web and in the flange

Rys. 4. Rozkład odkształcenia i naprężenia w stanie granicznej nośności w przypadku stropów Kleina: a) strop lekki/ciężki; b) strop półciężki; strefa sprężysta znajduje się w półce; c) strop półciężki; strefa sprężysta jest w środku i w półce

We introduce the following notation (see Figure 3 and Figure 4):

$$\delta = \frac{c}{d}; \quad \gamma = \frac{A_s E_s \varepsilon_{mu}}{b d f_d}; \quad \alpha = \frac{\varepsilon_{ml}}{\varepsilon_{mu}}; \quad \beta = \frac{b_p}{b}; \quad \chi = \frac{h}{d} \quad (10)$$

where:

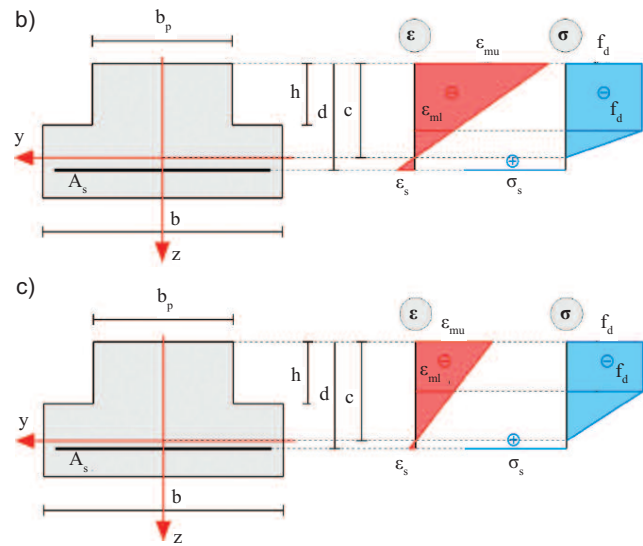
d – effective depth of the cross-section;
c – depth of the compression zone;
b – width of the cross-section;
 b_p – width of the web;
h – height of the web;
 ε_{mu} and ε_{ml} – limit deformations of the brick material;
 f_d – design compressive strength of brick material;
 E_s – the Young's modulus of the steel;
 f_{yd} – design yield strength of steel;
 A_s – reinforcement area.

We are considering a beam with a repeated cross-section of the Klein plate.

The depth of the compression zone is determined from the force equilibrium equation in the cross-section. For light or heavy plates (Figure 4a), the dimensionless depth of the compression zone is:

$$\delta = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2\gamma(2 - \alpha)} - \gamma}{2 - \alpha} \quad (11)$$

for semi-heavy plates, for which the elastic zone remains in the flange (Figure 4b):



Wprowadzamy oznaczenia (rysunek 3 i rysunek 4):

$$\delta = \frac{c}{d}; \quad \gamma = \frac{A_s E_s \varepsilon_{mu}}{b d f_d}; \quad \alpha = \frac{\varepsilon_{ml}}{\varepsilon_{mu}}; \quad \beta = \frac{b_p}{b}; \quad \chi = \frac{h}{d} \quad (10)$$

gdzie:

d – wysokość użyteczna przekroju;
c – wysokość strefy ściskanej;
b – szerokość przekroju;
 b_p – szerokość środka;
h – wysokość środka;
 ε_{mu} i ε_{ml} – odkształcenia graniczne materiału cegły;
 f_d – obliczeniowa wytrzymałość materiału cegły na ściskanie;
 E_s – moduł Younga stali;
 f_{yd} – obliczeniowa granica plastyczności stali;
 A_s – pole zbrojenia.

Rozpatrujemy belkę o przekroju powtarzalnym płyty Kleina.

Zasięg strefy ściskanej wyznacza się z równania równowagi sił w przekroju. W przypadku płyt lekkich lub ciężkich (rysunek 4a) bezwymiarowy zasięg strefy ściskanej to:

$$\delta = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2\gamma(2 - \alpha)} - \gamma}{2 - \alpha} \quad (11)$$

w przypadku płyt półciężkich, w których strefa sprężysta pozostaje w półce (rysunek 4b):

$$\delta = \frac{\sqrt{(\gamma - \chi(1 - \beta))^2 + 2\gamma(2 - \alpha)} - (\gamma - (1 - \beta)\chi)}{2 - \alpha} \quad (12)$$

and for semi-heavy slabs, for which the elastic zone is partially located in the web (Figure 4c):

$$\delta = \frac{\sqrt{(\alpha\gamma - \chi(1 - \beta))^2 + (1 + \beta(\alpha(2 - \alpha) - 1))(2\gamma\alpha - (1 - \beta)\chi^2)} - (\alpha\gamma - (1 - \beta)\chi)}{(1 + \beta(\alpha(2 - \alpha) - 1))} \quad (13)$$

Formulas (11), (12) and (13) are valid if the steel does not yield, which means that the deformation at the reinforcement level must be less than f_{yd}/E_s . This condition implies the following limitation on the depth of the compression zone:

$$\delta \geq \delta_{lim} = \frac{E_s \varepsilon_{mu}}{f_{yd} + E_s \varepsilon_{mu}} \quad (14)$$

For typical Klein slabs $\delta_{lim} = 0,7 \div 0,8$, while $\delta > 0,8$, and therefore the inequality (14) is usually satisfied. For a T-section (12) and (13), the bending axis is located in the flange, so the following occurs:

$$\delta \geq \chi \quad (15)$$

The condition to apply formula (12) is that:

$$(1 - \alpha) \delta \geq \chi \quad (16)$$

and for (13):

$$(1 - \alpha) \delta < \chi \quad (17)$$

When these inequalities are met, the ultimate capacity of the beam cross-section is as follows:

- for light or heavy slabs:

$$M_{Rd} = (1/6)b d^2 f_d \delta \{3(2 - \alpha - \delta + \alpha\delta) - \alpha^2 \delta\} \quad (18)$$

for semi-heavy slabs for which the elastic zone remains in the flange:

$$M_{Rd} = (1/6)b d^2 f_d [\delta \{3(2 - \alpha - \delta + \alpha\delta) - \alpha^2 \delta\} - 3(1 - \beta)\chi(2 - \chi)] \quad (19)$$

- for semi-heavy slabs for which the elastic zone is partially located in the web:

$$M_{Rd} = \frac{1}{6} b d^2 f_d [\delta \beta \{3(2 - \alpha - \delta + \alpha\delta) - \alpha^2 \delta\} + \frac{(1 - \beta)(\delta - \chi)^2(3 - \delta - 2\chi)}{\alpha \delta}] \quad (20)$$

When $\beta \rightarrow 1$ and $\chi \rightarrow 0$ the equations for the T-plate tend to the formulas obtained for rectangular plates, that is (12) and (13) approach (11), whereas the limit of (19) and (20) is (18). The obtained sectional moment capacities are conservative in relation to the values obtained assuming a parabolic model. There is no need to check the deflections of the ceramic slab, because these slabs are quite stiff. Typically, the ratio $L_{plates,eff}/d < 20$, so in accordance with point 5.5.2.5 of the code [4], the serviceability limit state is not reached.

$$\delta = \frac{\sqrt{(\gamma - \chi(1 - \beta))^2 + 2\gamma(2 - \alpha)} - (\gamma - (1 - \beta)\chi)}{2 - \alpha} \quad (12)$$

a w przypadku płyt półciężkich, w których strefa sprężysta znajduje się częściowo w środniku (rysunek 4c):

$$\delta = \frac{\sqrt{(\alpha\gamma - \chi(1 - \beta))^2 + (1 + \beta(\alpha(2 - \alpha) - 1))(2\gamma\alpha - (1 - \beta)\chi^2)} - (\alpha\gamma - (1 - \beta)\chi)}{(1 + \beta(\alpha(2 - \alpha) - 1))} \quad (13)$$

Wzory (11), (12) oraz (13) obowiązują, jeżeli stal się nie uplastyczni, co oznacza, że odkształcenie na poziomie zbrojenia musi być mniejsze od f_{yd}/E_s . Ten warunek implikuje następujące ograniczenie na wysokości strefy ścis-kanej:

$$\delta \geq \delta_{lim} = \frac{E_s \varepsilon_{mu}}{f_{yd} + E_s \varepsilon_{mu}} \quad (14)$$

W typowych stropach Kleina $\delta_{lim} = 0,7 \div 0,8$, podczas gdy $\delta > 0,8$, a więc nierówność (14) jest zwykle spełniona. W przypadku przekroju teowego (12) oraz (13) oś zginania znajduje się w półce, a więc:

$$\delta \geq \chi \quad (15)$$

Aby obowiązywał wzór (12), musi być spełniony warunek:

$$(1 - \alpha) \delta \geq \chi \quad (16)$$

a w przypadku wzoru (13):

$$(1 - \alpha) \delta < \chi \quad (17)$$

Przy spełnieniu tych ograniczeń, nośność przekroju belkowego jest następująca:

- w przypadku płyt lekkich lub ciężkich:

$$M_{Rd} = (1/6)b d^2 f_d \delta \{3(2 - \alpha - \delta + \alpha\delta) - \alpha^2 \delta\} \quad (18)$$

w przypadku płyt półciężkich, w których strefa sprężysta pozostaje w półce:

$$M_{Rd} = (1/6)b d^2 f_d [\delta \{3(2 - \alpha - \delta + \alpha\delta) - \alpha^2 \delta\} - 3(1 - \beta)\chi(2 - \chi)] \quad (19)$$

- w przypadku płyt półciężkich, w których strefa sprężysta znajduje się częściowo w środniku:

$$M_{Rd} = \frac{1}{6} b d^2 f_d [\delta \beta \{3(2 - \alpha - \delta + \alpha\delta) - \alpha^2 \delta\} + \frac{(1 - \beta)(\delta - \chi)^2(3 - \delta - 2\chi)}{\alpha \delta}] \quad (20)$$

Przy $\beta \rightarrow 1$ oraz $\chi \rightarrow 0$ równania dotyczące płyty teowej dążą do formuł otrzymanych w przypadku płyt prostokątnych, tzn. (12) oraz (13) dążą do (11), natomiast (19) i (20) do (18). Otrzymane nośności są nośnościami konserwatywnymi w stosunku do wartości, które otrzymuje się przy założeniu modelu parabolicznego. Nie ma potrzeby sprawdzania ugięć płyt ceramicznych stropu Kleina, ponieważ są one dość sztywne. Typowo stosunek $L_{płyty,eff}/d < 20$, a więc w myśl punktu 5.5.2.5 normy [4] stan graniczny użyteczności nie jest osiągany.

Example: determining the ultimate sectional capacity of reinforced ceramic slabs of a Klein slab

The building in question had both solid and perforated brick floors. We will present calculations for three cases: we will find the moment capacities of the Klein brick slabs for a heavy slab made of solid brick and two semi-heavy slabs made of solid brick and perforated brick, respectively.

It was assumed that the steel flat bars were made of 010 W structural steel, in accordance with PN/B-190 [3]. It has properties [13]:

$$f_y = 210 \text{ MPa}, \gamma_s = 1,15, f_{yd} = 210/1,15 = 182,6 \text{ MPa}, E_s = 210 \text{ GPa} \quad (21)$$

Yielding of steel occurs when the strain reaches $0,8695 \cdot 10^{-3}$

In the case of solid brick, the compressive strength of the masonry elements is 10 MPa, while the strength of the mortar is 2,5 MPa. Material characteristics, in accordance with [4], are as follows:

$$\begin{aligned} f_b &= 10 \text{ MPa}, f_m = 2,5 \text{ MPa}, K = 0,45 \\ f_k &= 0,45 \cdot 10^{0,7} \cdot 2,5^{0,3} = 2,969 \text{ MPa}, \gamma_M = 2,5 \\ f_d &= 2,969/2,5 = 1,188 \text{ MPa}, \epsilon_{m1} = 0,001, \epsilon_{mu} = 0,0035 \end{aligned} \quad (22)$$

We will calculate the ultimate limit capacity of the cross-section of the heavy plate shown in Figure 5, for which the design moment is $M_{Ed} = 320 \text{ kNcm}$. The reinforcement with an area is distributed every joint ($0,4 \text{ cm}^2$ every $8,5 \text{ cm}$), along the length of 100 cm there is $4,71 \text{ cm}^2$ of steel. The dimensionless coefficients are:

$$\gamma = \frac{4,71 \cdot 210000 \cdot 0,0035}{100 \cdot 9,5 \cdot 1,188} = 3,07, \alpha = \frac{1}{3,5} = 0,286 \quad (23)$$

and the depth of the compression zone, according to (11), is:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\sqrt{3,07^2 + 2 \cdot 3,07 \cdot (2 - 0,286)} - 3,07}{2 - 0,286} = 0,815 \\ c &= 0,815 \cdot 9,5 = 7,74 \text{ cm} \end{aligned} \quad (24)$$

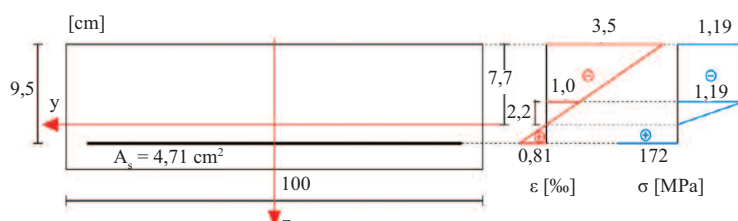
The condition for the applicability of the formula (11) is fulfilled:

$$\delta_{lim} = \frac{210000 \cdot 0,0035}{182,6 + 210000 \cdot 0,0035} = 0,801 < 0,815 = \delta \quad (25)$$

The capacity of the heavy slab under consideration, according to (18), equals:

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= \frac{100 \cdot 9,5^2 \cdot 0,119}{6} \cdot 0,815 \{3(2 - 0,286 - 0,815 + 0,285 \cdot \\ &\cdot 0,815) - 0,286^2 \cdot 0,815\} = 485 \text{ kNcm} > 320 \text{ kNcm} = M_{Ed} \end{aligned} \quad (26)$$

The slab carries the given load.



Wyznaczenie nośności zbrojonych płyt ceramicznych stropu Kleina

W rozpatrywanym budynku były zarówno stropy wykonane z cegły pełnej, jak i z cegły dziurawki. Przedstawimy obliczenia nośności płyt ceglanych stropu Kleina w przypadku płyty ciężkiej wykonanej z cegły pełnej oraz dwóch płyt półciężkich, wykonanych odpowiednio z cegły pełnej i z cegły dziurawki.

Przyjęto, że płaskowniki stalowe zostały wykonane ze stali konstrukcyjnej 010 W, zgodnie z PN/B-190 [3]. Ma ona właściwości [13]:

$$f_y = 210 \text{ MPa}, \gamma_s = 1,15, f_{yd} = 210/1,15 = 182,6 \text{ MPa}, E_s = 210 \text{ GPa} \quad (21)$$

Uplastycznienie stali zachodzi przy odkształceniu $0,8695 \cdot 10^{-3}$.

W przypadku cegły pełnej wytrzymałość na ściskanie elementów murowych to 10 MPa, natomiast wytrzymałość zaprawy wynosi 2,5 MPa. Charakterystyki materiałowe, zgodnie z [4], są następujące:

$$\begin{aligned} f_b &= 10 \text{ MPa}, f_m = 2,5 \text{ MPa}, K = 0,45 \\ f_k &= 0,45 \cdot 10^{0,7} \cdot 2,5^{0,3} = 2,969 \text{ MPa}, \gamma_M = 2,5 \\ f_d &= 2,969/2,5 = 1,188 \text{ MPa}, \epsilon_{m1} = 0,001, \epsilon_{mu} = 0,0035 \end{aligned} \quad (22)$$

Obliczymy nośność przekroju płyty ciężkiej przedstawionej na rysunku 5, dla której moment obliczeniowy to $M_{Ed} = 320 \text{ kNcm}$. Zbrojenie o polu $0,4 \text{ cm}^2$ jest rozmieszczone co spoinę (co $8,5 \text{ cm}$). Na długości 100 cm znajduje się $4,71 \text{ cm}^2$ stali. Współczynniki bezwymiarowe wynoszą:

$$\gamma = \frac{4,71 \cdot 210000 \cdot 0,0035}{100 \cdot 9,5 \cdot 1,188} = 3,07, \alpha = \frac{1}{3,5} = 0,286 \quad (23)$$

a zasięg strefy ściskanej, zgodnie z (11):

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\sqrt{3,07^2 + 2 \cdot 3,07 \cdot (2 - 0,286)} - 3,07}{2 - 0,286} = 0,815 \\ c &= 0,815 \cdot 9,5 = 7,74 \text{ cm} \end{aligned} \quad (24)$$

Warunek stosowania wzoru (11) jest spełniony:

$$\delta_{lim} = \frac{210000 \cdot 0,0035}{182,6 + 210000 \cdot 0,0035} = 0,801 < 0,815 = \delta \quad (25)$$

Nośność rozpatrywanej płyty ciężkiej, zgodnie z (18), wynosi:

$$\begin{aligned} M_{Rd} &= \frac{100 \cdot 9,5^2 \cdot 0,119}{6} \cdot 0,815 \{3(2 - 0,286 - 0,815 + 0,285 \cdot \\ &\cdot 0,815) - 0,286^2 \cdot 0,815\} = 485 \text{ kNcm} > 320 \text{ kNcm} = M_{Ed} \end{aligned} \quad (26)$$

Płyta przenosi zadane obciążenie.

Fig. 5. Klein's heavy ceramic slab, made of solid brick. Geometry, strains and stresses in the ultimate limit state

Rys. 5. Płyta ciężka stropu Kleina, wykonana z cegły pełnej. Geometria i odkształcenia oraz naprężenia w stanie granicznym nośności

In the second example, we will calculate the load-bearing capacity of a semi-heavy Klein slab, the repeating cross-section of which is shown in Figure 6. The slab is reinforced with flat bars is 2 mm x 30 mm, placed at every joint. Such a slab is located, among others, on the ground floor in the A-1(k) spot, where the design moment is $M_{Ed} = 539 \text{ kNcm}$ [8]. The following layer arrangement was found during site investigation: cement-lime plaster (2.0 cm), semi-heavy perforated brick slab (12.0 cm), expanded clay backfill (2.5 cm), polystyrene (6.0 cm), cement screed (7.0 cm), terrazzo tiles (0.5 cm). The Klein slabs are supported on steel beams made of German standard I-beams, 200 mm high, spaced 1.4 m apart.

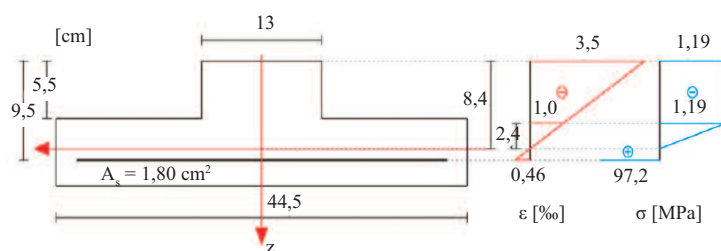


Fig. 6. Klein's semi-heavy ceramic slab, made of solid brick, in a historic building at Starynkiewicza Square in Warsaw. Geometry, strains and stresses in the ultimate limit state

Rys. 6. Płyta półciężka stropu Kleina, wykonana z cegły pełnej, w historycznym budynku przy placu Starynkiewicza w Warszawie. Geometria, odkształcenia i naprężenia w stanie granicznym nośności

We calculate the dimensionless depth of the compression zone using the formula (12). Denoting:

$$\gamma = \frac{1,8 \cdot 21000 \cdot 0,0035}{44,5 \cdot 9,5 \cdot 0,1188} = 2,64 \quad \alpha = \frac{1}{3,5} = 0,286$$

$$\beta = \frac{13}{44,5} = 0,292 \quad \chi = \frac{5,5}{9,5} = 0,579$$
(27)

we get:

$$\delta = \frac{\sqrt{(2,64 - 0,579(1 - 0,292))^2 + 2 \cdot 2,64(2 - 0,286) - 1(2,64 - 0,579)(1 - 0,292)}}{2 - 0,286} = 0,884$$
(28)

The conditions of applicability of the formula (12), namely inequalities (14), (15) and (16), should be checked. They are met:

$$\delta_{lim} = \frac{210000 \cdot 0,0035}{182,6 + 210000 \cdot 0,0035} = 0,801, \delta = 0,884 > 0,801$$

$$\delta = 0,884 \geq 0,579 = \chi, (1 - \alpha) \delta = 0,631 \geq 0,579 = \chi$$
(29)

The depth of the compression zone is:

$$c = 0,884 \cdot 9,5 = \mathbf{8,40 \text{ cm}}$$
(30)

while the ultimate moment capacity of the brick slab cross-section, in accordance with (19), equals:

$$M_{Rd} = \frac{44,5 \cdot 9,5^2 \cdot 0,119}{6} [0,884 \cdot \{3 \cdot (2 - 0,286 - 0,884 + 0,286 \cdot 0,884) - 0,286^2 \cdot 0,884\} - 3(1 - 0,292) \cdot 0,579 \cdot (2 - 0,579)] = \mathbf{843 \text{ kNcm}} > 539 \text{ kNcm} = M_{Ed}$$
(31)

The slab carries the given load, the element's utilization is 64%.

The Klein slab with a semi-heavy slab made of perforated brick is located, among others, on the 3rd floor in the location A-36(k), where the design moment is $M_{Ed} = 200 \text{ kNcm}$ [8]. The geometry of the slab under consideration is shown in Figure 7.

W ramach drugiego przykładu obliczymy nośność płyty półciężkiej stropu Kleina, której przekrój powtarzalny jest przedstawiony na rysunku 6. Płyta jest zbrojona płaskownikami 2 mm x 30 mm, rozmieszczonymi co spoinę i umiejscowiona m.in. na parterze w miejscu odkrywki A-1(k), gdzie obliczeniowy moment to $M_{Ed} = 539 \text{ kNcm}$ [8]. W odkrywce tej stwierdzono następujący układ warstw: tynk cementowo-wapienny (2,0 cm), płyta półciężka z cegły dziurawki (12,0 cm), zasypka keramzytowa (2,5 cm); styropian (6,0 cm); wylewka cementowa (7,0 cm); płytki lastryko (0,5 cm). Płyty Kleina oparte są na belkach stalowych z dwuteowników o wysokości 200 mm w rozstawie co 1,4 m.

Obliczamy bezwymiarowy zasięg strefy ściskanej ze wzoru (12). Przy:

$$\gamma = \frac{1,8 \cdot 21000 \cdot 0,0035}{44,5 \cdot 9,5 \cdot 0,1188} = 2,64 \quad \alpha = \frac{1}{3,5} = 0,286$$

$$\beta = \frac{13}{44,5} = 0,292 \quad \chi = \frac{5,5}{9,5} = 0,579$$
(27)

otrzymujemy:

$$\delta = \frac{\sqrt{(2,64 - 0,579(1 - 0,292))^2 + 2 \cdot 2,64(2 - 0,286) - 1(2,64 - 0,579)(1 - 0,292)}}{2 - 0,286} = 0,884$$
(28)

Należy sprawdzić warunki stosowania wzoru (12), czyli nierówności (14), (15) oraz (16). Są one spełnione:

$$\delta_{lim} = \frac{210000 \cdot 0,0035}{182,6 + 210000 \cdot 0,0035} = 0,801, \delta = 0,884 > 0,801$$

$$\delta = 0,884 \geq 0,579 = \chi, (1 - \alpha) \delta = 0,631 \geq 0,579 = \chi$$
(29)

Zasięg strefy ściskanej to:

$$c = 0,884 \cdot 9,5 = \mathbf{8,40 \text{ cm}}$$
(30)

natomiast nośność przekroju płyty ceglanej, zgodnie z (19), wynosi:

$$M_{Rd} = \frac{44,5 \cdot 9,5^2 \cdot 0,119}{6} [0,884 \cdot \{3 \cdot (2 - 0,286 - 0,884 + 0,286 \cdot 0,884) - 0,286^2 \cdot 0,884\} - 3(1 - 0,292) \cdot 0,579 \cdot (2 - 0,579)] = \mathbf{843 \text{ kNcm}} > 539 \text{ kNcm} = M_{Ed}$$
(31)

Płyta przenosi zadane obciążenie, wyężenie elementu to 64%.

Strop Kleina z płytą półciężką, wykonaną z cegły dziurawki, znajduje się m.in. na kondygnacji 3 w miejscu odkrywki A-36(k), gdzie obliczeniowy moment to $M_{Ed} = 200 \text{ kNcm}$ [8]. Geometria rozpatrywanej płyty jest przedstawiona na rysunku 7.

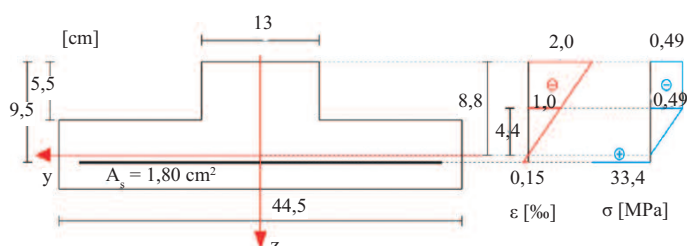


Fig. 7. Klein's semi-heavy ceramic slab, made of perforated brick, in a historic building at Starynkiewicza Square in Warsaw. Geometry, strains and stresses in the ultimate limit state

Rys. 7. Płyta półciężka stropu Kleina, wykonana z cegły dziurawki, w historycznym budynku przy placu Starynkiewicza w Warszawie. Geometria, odkształcenia i naprężenia w stanie granicznym nośności

The compressive strength of the masonry elements of the slabs made of perforated brick is 10 MPa, and the compressive strength of mortar is 2,5 MPa. For this slab, we assume:

$$f_b = 5 \text{ MPa}, f_m = 2,5 \text{ MPa}, K = 0,30$$

$$f_k = 0,30 \cdot 5^{0,7} \cdot 2,5^{0,3} = 1,218 \text{ MPa}, \gamma_m = 2,5 \quad (32)$$

$$f_d = 1,218/2,5 = 0,4874 \text{ MPa}, \varepsilon_{m1} = 0,001, \varepsilon_{mu} = 0,002$$

We calculate the dimensionless depth of the compression zone using formula (12). Calculating:

$$\gamma = \frac{1,8 \cdot 21000 \cdot 0,002}{44,5 \cdot 9,5 \cdot 0,04874} = 3,67 \quad \alpha = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\beta = \frac{13}{44,5} = 0,292 \quad \chi = \frac{5,5}{9,5} = 0,579 \quad (33)$$

we obtain the dimensionless depth of the compression zone (13):

$$\delta = 0,926 \quad (34)$$

Conditions of applicability of (13) are inequalities (14), (15) and (17), which are met:

$$\delta_{lim} = \frac{210000 \cdot 0,002}{182,6 + 210000 \cdot 0,002} = 0,697; \delta = 0,926 > 0,697$$

$$\delta = 0,926 \geq 0,579 = \chi; (1 - \alpha) \delta = 0,463 < 0,5789 = \chi \quad (35)$$

The compression zone has a depth of:

$$\delta = 0,926 \cdot 9,5 = 8,80 \text{ cm} \quad (36)$$

and the ultimate limit capacity of the brick slab cross-section (20) takes on the value:

$$M_{Rd} = 309 \text{ kNcm} > 200 \text{ kNcm} = M_{Ed} \quad (37)$$

Condition of not exceeding the limit state (9) is satisfied; the utilization of the cross-section is 65%. The graphs of longitudinal strain and normal stress are shown in Figure 7.

Summary

In this paper we presented a scheme of static calculations of the Klein slab, consisting of steel I-beams and a reinforced ceramic slab. We presented formulas for the ultimate limit capacity of a brick slab, which are not provided in the design code [4]. The relationships are illustrated with working examples drawn from the technical report of the existing building [8].

Old Polish codes recommended performing calculations using various methods [2], including the allowable stress design method, which is more conservative than the limit state design method. This means that, according to Eurocode [4], existing Klein slabs can support higher loads than they were

Wytrzymałość na ściskanie elementów murowych płyt wykonanych z cegły dziurawki to 10 MPa, a zaprawy 2,5 MPa. W przypadku tej płyty przyjmujemy:

$$f_b = 5 \text{ MPa}, f_m = 2,5 \text{ MPa}, K = 0,30$$

$$f_k = 0,30 \cdot 5^{0,7} \cdot 2,5^{0,3} = 1,218 \text{ MPa}, \gamma_m = 2,5 \quad (32)$$

$$f_d = 1,218/2,5 = 0,4874 \text{ MPa}, \varepsilon_{m1} = 0,001, \varepsilon_{mu} = 0,002$$

Obliczamy bezwymiarowy zasięg strefy ściskanej ze wzoru (12). Przy:

$$\gamma = \frac{1,8 \cdot 21000 \cdot 0,002}{44,5 \cdot 9,5 \cdot 0,04874} = 3,67 \quad \alpha = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\beta = \frac{13}{44,5} = 0,292 \quad \chi = \frac{5,5}{9,5} = 0,579 \quad (33)$$

otrzymujemy bezwymiarowy zasięg strefy ściskanej (13):

$$\delta = 0,926 \quad (34)$$

Warunki stosowalności (13), to nierówności (14), (15) oraz (17), które są spełnione:

$$\delta_{lim} = \frac{210000 \cdot 0,002}{182,6 + 210000 \cdot 0,002} = 0,697; \delta = 0,926 > 0,697$$

$$\delta = 0,926 \geq 0,579 = \chi; (1 - \alpha) \delta = 0,463 < 0,5789 = \chi \quad (35)$$

Strefa ściskana ma wysokość:

$$\delta = 0,926 \cdot 9,5 = 8,80 \text{ cm} \quad (36)$$

a nośność przekroju płyty ceglanej (20) przybiera wartość:

$$M_{Rd} = 309 \text{ kNcm} > 200 \text{ kNcm} = M_{Ed} \quad (37)$$

Warunek nieprzekroczenia stanu granicznego (9) jest spełniony, a wyężenie wynosi 65%. Wykresy odkształcenia podłużnego i naprężenia normalnego przedstawiono na rysunku 7.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono schemat obliczeń statyczno-wytrzymałościowych stropu Kleina, złożonego ze stalowych dwuteowników oraz zbrojonej płyty ceramicznej. Zaprezentowano wzory na nośność płyty ceglanej, które nie są podane w normie [4]. Zależności zostały zilustrowane przykładami zaczerpniętymi z ekspertyzy technicznej istniejącego budynku [8].

Stare normy polskie zalecały wykonywanie obliczeń różnymi metodami [2], m.in. metodą naprężeń dopuszczalnych, która jest bardziej konserwatywna niż metoda stanów granicznych. Oznacza to, że wg Eurokodu [4], istniejące stropy Kleina mogą przenosić większe obciążenia niż te, na które były pierwotnie projektowane. Z kolei nor-

originally designed for. In turn, PN-B design codes, which already use the limit state method, although they propose different loads and safety factors, can generate results similar to the Eurocode.

Formulas (18), (19) and (20) are conservative estimates of the ultimate limit capacity of the brick slab cross-section because a piecewise-linear model was used, while the actual curve is more parabolic. The analytical formulas for the parabolic model are very complex.

In buildings with Klein slabs, a frequent lack of technical documentation or its incompleteness is a significant problem. Another significant factor is the degradation of the structure during use. It is important to emphasize that assessing the ultimate limit capacity of a Klein slab requires determining its current geometric and material parameters, so site investigations play a crucial role. Typical diagnostic tests for Klein slabs include measuring the span, spacing, and cross-section of steel beams; the type and reinforcement of the ceramic slab; and the arrangement of floor layers. It is recommended to adopt material parameters for the profile and reinforcing steel based on codes or literature guidelines, taking into account the period of erection of the building. This level of analysis allows for basic calculations of the Klein slab.

The presented work concerns flat slabs, but Klein arched slabs are also used. If the normal force in the arch is sufficiently small, it can be omitted from the calculations – the code [4] provides a simplified condition limiting normal stresses (formula (6.26)). Otherwise, the regulations provide general guidelines, for example, the applicability of the hypothesis of flat cross-sections. This means that the arched floor is designed analogously to reinforced concrete columns. However, providing closed formulas for the interaction curve will be the subject of a separate paper.

The publication was financed by a subsidy from the dean of the Faculty of Civil Engineering of the Warsaw University of Technology.

Received: 08.07.2025

Revised: 10.09.2025

Published: 23.12.2025

my PN-B, w których stosowano już metodę stanów granicznych, mogą generować wyniki zbliżone do Eurokodu, mimo iż proponują inne obciążenia i współczynniki bezpieczeństwa.

Wzory (18), (19) i (20) są oszacowaniami konserwatywnymi nośności płyty ceglanej, ponieważ zastosowano model odcinkowo-liniowy, natomiast rzeczywisty przebieg jest bardziej zbliżony do parabolicznego. Formuły analityczne w przypadku modelu parabolicznego są bardzo złożone.

W budynkach ze stropami Kleina problemem jest częsty brak dokumentacji technicznej lub jej niekompletność. Kolejnym istotnym czynnikiem jest degradacja konstrukcji w trakcie użytkowania. Trzeba podkreślić, że ocena nośności stropu Kleina wymaga ustalenia jego aktualnych parametrów geometryczno-użytkowych, ogromną rolę pełnią więc badania stanu faktycznego. Typowe badania diagnostyczne stropów Kleina obejmują pomiar rozpiętości, rozstawu i przekroju belek stalowych, typu i zbrojenia płyty ceramicznej oraz układu warstw wykończeniowych. Parametry materiałowe stali profilowej i zbrojeniowej zaleca się przyjmować na podstawie wytycznych normowych/literaturowych, biorąc pod uwagę okres wzniesienia obiektu. Taki zakres rozpoznania pozwala na wykonanie podstawowych obliczeń stropu Kleina.

Artykuł dotyczy stropów płaskich, natomiast zdarza się także zastosowanie łukowych stropów Kleina. W przypadku, gdy siła normalna w łuku jest wystarczająco mała, można jej nie uwzględniać w obliczeniach. Norma [4] podaje uproszczony warunek ograniczający naprężenia normalne. W przeciwnym przypadku w przepisach podane są ogólne wytyczne, np. stosowalność hipotezy płaskich przekrojów. Oznacza to, że strop łukowy wymiaruje się analogicznie do słupów żelbetowych. Podanie zamkniętych wzorów dotyczących krzywej interakcji będzie jednak tematem odrębnej pracy.

Publikacja została sfinansowana z subwencji dziekana Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej.

Artykuł wpłynął do redakcji: 08.07.2025 r.

Otrzymało poprawiony po recenzjach: 10.09.2025 r.

Opublikowano: 23.12.2025 r.

Literature

- [1] Drobic Ł., Pająk Z. Stropy z Drobnowymiarowych Elementów. Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2010.
- [2] Lewicki, B. Polskie Normy Projektowania Konstrukcji. Konstrukcje z Betonu, Konstrukcje Murowe, Niezawodność Konstrukcji – Rys Historyczny; Wydawnictwa Instytutu Techniki Budowlanej; Warszawa, 2009.
- [3] Bryła S. Nowe Przepisy Obliczania Konstrukcji Stalowych PN/B-190. Politechnika Warszawska, Zakład Badawczy Budownictwa, Zeszyt 2, 1–16; 1938.
- [4] PN-EN 1996-1-1, 2010. Eurokod 6: Projektowanie konstrukcji murowych. Część 1-1: Reguły ogólne dla zbrojonych i niezbrojonych konstrukcji Murowych.
- [5] PN-EN 1993-1-1, 2006. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [6] Sieczkowski J., Nejman T. Ustroje Budowlane. Wydanie IV, Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej; 2007.
- [7] Hoła J., Pietraszek P., Schabowicz K. Obliczanie Konstrukcji Budynków Wznoszonych Tradycyjnie. Wrocław: Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne; 2006.

- [8] Idzikowski J., Spodzieja S., Adamczewski G., Kamińska I., Wójcik-Grząba I., Maciąg M., Daniluk K. Ekspertyza Techniczna Konstrukcji Budynku Przy Placu Starynkiewicza 7/9 w Warszawie. 2023.
- [9] Knyziak P., Spodzieja S., Krentowski JR., Pawłowicz JA., Sawczyński S., Gil-Mastalerczyk J. Semi-Destructive Testing Methods for Examining the Structural Condition of Historic Buildings. Eng. Fail. Anal. 2025; doi: 10.1016/j.engfailanal.2025.109354.
- [10] Wojtczak E. Budownictwo Ogólne w Ujęciu Tradycyjnym. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej; 2019.
- [11] Chmielewski R., Kruska L. Analiza Nośności Wybranego Przykładu Uszkodzonego Stropu Typu Klein. Inżynieria Bezpieczeństwa Obiektów Antropog. 2016.
- [12] Kozłowski A., Kubiszyn W., Pisarek Z., Ślęczka L., Wojnar A. Konstrukcje Stalowe. Przykłady Obliczeń Według PN-EN 1993-1-1. Część Druga: Stropy i Pomosty. Rzeszów: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej; 2011.
- [13] Czapliński K. Dawne Wyroby Ze Stopów Żelaza. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne; 2009.