

dr inż. Magdalena Olszewska^{1*)}

ORCID 0000-0003-4202-0694

dr inż. Kamil Stachecki²⁾

ORCID: 0000-0002-7522-8451

Proposition for selecting a method for determining the coefficient of subgrade reaction for homogeneous soil

Propozycja doboru metody wyznaczania współczynnika podatności podłoża w przypadku gruntu jednorodnego

DOI: 10.15199/33.2025.12.13

Abstract: The study analyzed the variability of the subgrade reaction coefficient k_s for homogenous soil. Boussinesq's theory was used to determine settlements and local k_s values. The calculations revealed a variation of k_s of approximately 28% across the slab plan, with the highest values at the edges and the lowest in the center. Implementing these values in the FEM model enables more accurate representation of settlements and bending moments than the classical assumption of constant subgrade reaction.

Keywords: subgrade reaction; coefficient of subgrade reaction; foundation slab; slab settlement.

Streszczenie: W artykule przeanalizowano zmienność współczynnika podatności podłoża k_s z gruntu jednorodnego. Zastosowano teorię Boussinesqa do wyznaczenia osiadania i lokalnych wartości k_s . Obliczenia wykazały zmienność k_s rzędu 28% w planie płyty, z największymi wartościami na jej krawędzi, a najmniejszymi w środku. Wprowadzenie obliczonych wartości do modelu MES pozwala uzyskać dokładniejsze odwzorowanie osiadania i momentów zginających niż przy klasycznym założeniu stałej podatności.

Słowa kluczowe: podatność podłoża; współczynnik podatności podłoża; płyta fundamentowa; osiadanie płyty.

In the engineering calculation methods currently in use, the modelling of the soil substrate is based on significant simplifications. Calculations are often carried out by modelling a slab elastically supported on a Winkler-type foundation described by the constant k [1]. The Winkler parameter expresses the deformability of the modelled subsoil with respect to settlement. It can therefore be expressed as a function of two variables:

$$k(s, q) = \frac{q}{s} \quad (1)$$

where:

q – contact stresses under the surface of the slab [kPa]

s – settlement [m] [1, 2, 3].

The subgrade reaction coefficient k in the Winkler approach is not a material property of the soil but rather a function of the applied load. This parameter should be adjusted each time to account for the foundation dimensions and loading conditions. The calculations require combining test results with correlations proposed by Terzaghi [1], Vesic [4], or Bowles [5], as well as engineering judgment [1, 2, 5]. The most commonly used formulas (Timoshenko – Goodier [6], Terzaghi [1], and Bowles [5]) show sensitivity to the plate dimensions, soil mois-

W obecnie stosowanych metodach obliczeń inżynierskich sposób modelowania podłoża grunto- wego bazuje na istotnych uproszczeniach. Obliczenia często prowadzone są przez zamodelowanie płyty opartej sprężystości na podłożu typu Winklera opisanego stałą k [1]. Parametr Winklera wyraża podatność modelowanego podłoża na osiadanie. Można więc go zapisać jako funkcję dwóch zmiennych:

$$k(s, q) = \frac{q}{s} \quad (1)$$

gdzie:

q – naprężenia kontaktowe pod powierzchnią płyty [kPa]

s – osiadanie [m] [1, 2, 3].

Współczynnik podatności podłoża k w ujęciu Winklera nie jest cechą materiałową gruntu, lecz funkcją obciążenia. Parametr ten powinien być każdorazowo korygowany z uwzględnieniem wymiarów fundamentów oraz warunków obciążenia. Obliczenia wymagają łączenia wyników testu z korelacjami Terzaghiego [1], Vesicia [4] czy Bowlesa [5] oraz oceną inżynierską [1, 2, 5]. Najczęściej stosowane formuły (Timoshenko-Goodier [6], Terzaghi [1] i Bowles [5]) wykazują wrażliwość na wymiary płyty, stopień wilgotności gruntu, prędkość obciążania, podkreślając, że przy modelu Winklera błędy w k silnie wpływają na osiadanie, a słabiej na siły wewnętrzne. Sprężyny Winklera zaleca się stosować głównie jako narzędzie do szybkiej oceny rozkładu reakcji podłoża, a do prognozy przemieszczeń stosować modele MES, co stanowi ważną wska-

¹⁾ Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska

²⁾ Politechnika Koszalińska, Wydział Inżynierii Lądowej, Środowiska i Geodezji

^{*)} Adres do korespondencji: magdalena.olszewska@zut.edu.pl

ture content, and loading rate, emphasizing that, in the Winkler model, errors in k significantly affect settlement predictions but have a weaker influence on internal forces. Winkler springs are recommended mainly as a tool for quickly assessing the distribution of subgrade reactions, while FEM models should be used for displacement predictions, which is an important guideline when calibrating k for homogeneous soils [1, 2, 3, 5, 6].

Pantelidis [7] demonstrated that most commonly used methods for transforming a layered profile into an equivalent Young's modulus E_{eq} lead to significant errors in estimating soil stiffness, which is crucial when calculating the subgrade reaction coefficient in the Winkler model. Pantelidis [7] emphasized the necessity of calibrating Winkler springs when the Poisson's ratio $\nu \rightarrow 0$, as this indicates the absence of procedures accounting for the variation of the deformation modulus with depth $E(z)$, which limits the accuracy of determining the subgrade reaction coefficient k [7]. Alpaslan [8], in turn, presented four methods for determining the subgrade reaction coefficient k_s in the Winkler model and highlighted that k_s is not a soil constant but depends on many factors. Therefore, for analyses using the Winkler model, a multiparameter approach is recommended, particularly one incorporating seismic measurement data [7, 8].

Olszewska [9] demonstrated that assuming a constant value of the subgrade reaction coefficient k_s in the Winkler model for a homogeneous soil leads to an unnaturally linear reaction distribution. Therefore, an adaptive modification of k_s on the FEM mesh was proposed, depending on local stress conditions. The results indicate that iterative coupling of the structural model with the soil model while accounting for the variability $k_s = f(\sigma, \phi, E_0)$ – significantly improves the representation of the actual settlement pattern and contact reaction distribution in Winkler-type analyses [9].

Avci and Gürbüz [10], based on 43 full-scale plate load tests and FEM calibration, demonstrated that the subgrade reaction coefficient k_s in sands increases with the friction angle ϕ and the embedment depth, but decreases sharply with increasing displacement. This disproves the common assumption of $k = const$ used in the classical Winkler model. Avci and Gürbüz [10] developed families of $k(s)$ and $k(s, D_f, \phi)$ curves and showed that neglecting this nonlinearity may lead to significant under-design of structural elements. Therefore, for homogeneous soils, they recommend scaling plate load test results and incorporating the variability of k_s already at the stage of selecting the Winkler model [9]. Sadrekarimi and Akbarzad [11] compared classical formulas for determining the subgrade reaction coefficient k_s with the soft soil continuum model. They demonstrated that only the Vesic approach, correlated with an appropriately weighted deformation modulus E_s and the degree of compaction I_D , enables accurate settlement prediction within the Winkler model. At the same time, Sadrekarimi and Akbarzad [11] emphasize that despite accurate settlement estimates, the spring-based model overpredicts local contact stresses. This shows that k_s is highly sensitive to the stress distribution and therefore requires correction or the use of full continuum models [11].

Bogusz, Godlewski, and Kociniak [12] showed, using the example of a cooling tower, that in complex geological conditions the value of the subgrade reaction coefficient k_s should be deter-

mined in the case of calibration k in homogeneous soils [1, 2, 3, 5, 6].

Pantelidis [7] wykazał, że większość powszechnie stosowanych metod przekształcania profilu warstwowego w równoważny moduł Younga E_{eq} prowadzi do znacznych błędów w szacowaniu sztywności podłoża, co ma istotne znaczenie podczas obliczania współczynnika podatności podłoża w modelu Winklera. Pantelidis [7] podkreśla konieczność kalibracji sprężyn Winklera przy współczynniku Poissona $\nu \rightarrow 0$ oraz wskazuje na brak procedur uwzględniających zmienność modułu odkształcenia z głębokością $E(z)$, co ogranicza dokładność wyznaczania współczynnika podatności k_s [7]. Alpaslan [8] zestawiał natomiast cztery metody wyznaczania współczynnika podatności podłoża k_s w modelu Winklera i podkreślił, że k_s nie jest stałą cechą gruntu, lecz zależy od wielu czynników, dlatego w analizach Winklera zaleca się stosowanie podejścia wieloparametrowego, szczególnie z wykorzystaniem pomiarów sejsmicznych [7, 8].

Olszewska [9] wykazała, że przyjęcie stałej wartości współczynnika podatności podłoża k_s w modelu Winklera w przypadku jednorodnego gruntu prowadzi do nienaturalnie liniowego rozkładu reakcji, dlatego zaproponowano adaptacyjne modyfikowanie k_s na siatce MES w zależności od lokalnych naprężeń. Wyniki wskazują, że iteracyjne sprzężenie modelu konstrukcji z modelem gruntu, z uwzględnieniem zmienności $k_s = f(\sigma, \phi, E_0)$, pozwala znacznie poprawić odwzorowanie rzeczywistego rozkładu osiadań i reakcji kontaktowych w analizie Winklera [9].

Avci i Gürbüz [10] na bazie 43 pełnowymiarowych prób płytowych oraz kalibracji MES wykazali, że współczynnik podatności podłoża k_s w piaskach zwiększa się z kątem tarcia ϕ i głębokością posadawiania, lecz gwałtownie maleje wraz ze wzrostem przemieszczenia, co obala powszechne założenia $k = const$ stosowane w klasycznym modelu Winklera. Avci i Gürbüz [10] opracowali rodziny krzywych $k(s)$ oraz $k(s, D_f, \phi)$, i dowiedli, że nieuwzględnienie tej nieliniowości może prowadzić do znacznego niedowymiarowania elementów konstrukcji, dlatego w przypadku gruntów jednorodnych rekomendują skalowanie wyników prób płytowych oraz uwzględnienie zmienności k_s już na etapie doboru modelu Winklera [9]. Sadrekarimi i Akbarzad [11] porównali klasyczne wzory wyznaczania współczynnika podatności podłoża k_s z modelem ciągłym soft soil. Wykazali, że jedynie podejście Vesicia, skorelowane z odpowiednio ważonym modułem odkształcenia E_s i stopniem zagęszczenia I_D , umożliwia dokładne prognozowanie osiadania w modelu Winklera. Jednocześnie Sadrekarimi i Akbarzad [11] podkreślają, że mimo trafnej predykcji osiadania, model sprężynowy zawyża lokalne naciski kontaktowe. Dowodzi to, że k_s jest parametrem wrażliwym na rozkład naprężeń i wymaga korekty lub zastosowania pełnych modeli ciągłych [11].

Bogusz, Godlewski i Kociniak [12] pokazali, na przykładzie chłodni kominowej, że w złożonych warunkach geologicznych wartość współczynnika podatności podłoża k_s powinna być wyznaczana jako odwrotność przemieszczeń pionowych modelu 3D Hardening Soil, gdyż normowe procedury znacznie ją przeszacowują. Autorzy udowodnili, że k_s nie jest stałą właściwością gruntu, lecz parametrem projektowym zależnym od

mined as the inverse of the vertical displacements obtained from a 3D Hardening Soil model, since standard code procedures significantly overestimate it. The authors demonstrated that k_s is not an inherent soil property but a design parameter dependent on the calculation scenario. For this reason, even in seemingly homogeneous subsoil, the Winkler model should be iteratively calibrated based on FEM data and the initial stiffness G_0 to obtain a reliable assessment of settlements and foundation reactions [12].

Koltuk and Topçu [13] showed that when designing large foundation slabs, the relative stiffness of the soil – foundation system (K) plays a crucial role in correctly determining the subgrade reaction coefficient k_s . For $K \geq 0.174$, k_s may be overestimated by as much as 50 – 100% compared with FEM results. The authors [13] developed a threshold map of k values, enabling the automatic selection of the appropriate model (rigid or flexible) and recommending full FEM analyses in borderline cases. They also indicated that local asymmetric loading may cause multiple increases in k_s relative to its average value, which in classical Winkler models leads to underestimation of bending moments and consequently reinforcement demand, even in homogeneous subsoil [13].

A review of the literature clearly indicates that **the subgrade reaction coefficient k_s in the Winkler model is not a constant soil property** but an engineering parameter dependent on numerous factors, such as foundation geometry, embedment depth, stress level, and the soil deformation mechanism. Numerous studies confirm the necessity of iterative calibration of k_s using field data, empirical correlations, and FEM analyses – even for homogeneous soils – in order to obtain reliable settlement predictions and a realistic distribution of foundation – soil contact reactions.

The diversity of computational approaches emphasizing the need for k_s calibration leads to the conclusion that the issue of accounting for subgrade deformability in foundation design remains a current scientific and engineering problem.

Some engineering design software packages allow the determination of the subgrade reaction coefficient based on average stresses beneath the entire foundation area and soil parameters. Such an approach results in a constant value of k over the entire slab surface. Consequently, under uniformly distributed load across the slab, this assumption yields identical settlement values at all calculated points. However, when settlement is computed according to Boussinesq's theory [14, 15], different settlement values appear at the slab corners compared with the central region.

This article presents a computational analysis in which the settlement results obtained from Boussinesq's theory [14, 15] are implemented to determine the spatial variability of the Winkler parameter that defines the deformability of the soil medium.

Proposed calculation model

When analysing a foundation slab, it is divided into finite elements. When calculating settlement while accounting for the stress distribution in accordance with Boussinesq's theory [14, 15], it is necessary for each i -th node to consider both the settlement at that point and the settlement resulting from loading applied to all other subareas. This relationship can be expressed as follows:

scenariusza obliczeń. Z tego powodu nawet w pozornie jednorodnym podłożu należy iteracyjnie kalibrować model Winklera na podstawie danych z MES i sztywności początkowej G_0 , aby uzyskać wiarygodną ocenę osiadań i reakcji fundamentu [12].

Koltuk i Topçu [13] pokazali, że przy projektowaniu dużych płyt fundamentowych kluczowe znaczenie w celu poprawnego wyznaczenia współczynnika podatności k_s ma relatywna sztywność układu grunt-fundament (K). $K \geq 0,174$ może zawyżyć k_s nawet o 50 – 100% w porównaniu z wynikami MES. Autorzy [13] opracowali mapę progową wartości k , umożliwiającą automatyczny dobór odpowiedniego modelu (sztywnego lub elastycznego) oraz sugerującą pełne obliczenia MES w przypadkach granicznych. Wskazano również, że lokalne obciążenia asymetryczne mogą powodować wielokrotny wzrost k_s względem wartości średniej, co w klasycznych modelach Winklera prowadzi do niedoszacowania wartości momentów zginających i w konsekwencji ilości zbrojenia, nawet w jednorodnym podłożu [13].

Przegląd literatury jednoznacznie wskazuje, że **współczynnik podatności podłoża k_s w modelu Winklera nie jest stałą cechą gruntu**, lecz parametrem inżynierskim zależnym od wielu czynników, takich jak geometria fundamentu, głębokość posadowienia, poziom naprężeń oraz mechanizm odkształcenia gruntu. Liczne badania potwierdzają konieczność iteracyjnej kalibracji k_s z wykorzystaniem danych terenowych, korelacji empirycznych i analiz MES, nawet w przypadku gruntów jednorodnych, aby uzyskać wiarygodne prognozy osiadania i realistyczny rozkład reakcji fundament – podłoże.

Różnorodność podejść obliczeniowych wskazujących na potrzeby kalibracji współczynnika podatności prowadzi do wniosku, że problematyka uwzględnienia podatności podłoża w obliczeniach fundamentów jest ciągle aktualnym zagadnieniem naukowym oraz inżynierskim.

Niektóre programy komputerowe wspomagające projektowanie pozwalają na wyznaczenie wartości parametru podatności podłoża na podstawie naprężeń średnich pod całą powierzchnią fundamentu oraz parametrów podłoża gruntowego. Takie założenie powoduje uzyskanie stałej wartości k pod całą powierzchnią płyty. W efekcie takiego założenia możemy uzyskać, w przypadku równomiernie rozłożonego obciążenia na całej powierzchni płyty, jednakową wartość osiadania w każdym z obliczanych punktów. Obliczając osiadanie płyty na podstawie teorii Boussinesqa [14, 15] otrzymamy inne wartości osiadania w narożach płyty, a inne w części środkowej. W artykule zaprezentowano analizę obliczeniową polegającą na zaimplementowaniu wyników obliczeń osiadania płyty, na podstawie teorii Boussinesqa [14, 15], do określenia zmienności parametru Winklera określającego podatność podłoża gruntowego.

Proponowany model obliczeniowy

Analizując płytę fundamentową, dzielimy ją na elementy skończone. Obliczając osiadanie uwzględniające rozkład naprężeń, zgodnie z zasadami teorii Boussinesqa [14, 15], należy w przypadku każdego i -tego węzła uwzględnić zarówno osiadanie własne punktu, jak i osiadanie wynikające z obciążenia w pozostałych poletkach, co przedstawia zależność:

$$s_i = s_{i,w} + s_{i,d} \quad (2)$$

where:

$s_{i,w}$ – self settlement of i -th point;

$s_{i,d}$ – settlement of the i -th point resulting from the load on the remaining plots [14, 15, 16].

Self settlement is calculated by the formula stated below:

$$s_{i,w} = \int_{z_{i,1}}^{z_{i,2}} \frac{\sigma_{i,w}}{M_0} = \frac{h_i}{M_0} \sigma_{i,w} \quad (3)$$

In the case of a homogeneous subsoil, the above relationship can be simplified:

$$s_{i,w} = \frac{z_{0i}}{M_0} \sigma_{i,w} \quad (4)$$

where:

z_0 – boundary of the active zone of the i -th element [m],

$\sigma_{z,w}$ – stresses from external load for the i -th element [kPa],

h_i – thickness of the analyzed layer [m],

M_0 – compressibility modulus of the soil layer [kPa] [16].

To take into account the influence of neighboring elements on the value of settlement and the distribution of stress decay in the soil, and thus on the Winkler parameter determined for the i -th field, the following equation (5) was used. It expresses the value of $s_{i,d}$ as a function of the distance from the analyzed field and the thickness of the considered subsoil layer.

$$s_{i,d} = \sum_{j=1}^n \frac{3Q_j}{2\pi M_0} \cdot \left\{ \frac{2l_{ij}^2 + 3z_{i1}^2}{3(l_{ij}^2 + z_{i1}^2)^{3/2}} - \frac{2l_{ij}^2 + 3z_{i2}^2}{3(l_{ij}^2 + z_{i2}^2)^{3/2}} \right\} \quad (5)$$

Assuming that the boundary of the active zone is constant under the entire surface of the slab, we can write:

$$z_{i1} = 0 \quad (6)$$

and

$$z_{i2} = z_0 \quad (7)$$

Finally, the settlement of any homogeneous soil element resulting from Boussinesq's theory can be calculated from the following relationship after transforming equation (5) [16]:

$$s_i = \frac{z_0}{M_0} \sigma_{i,w} + \sum_{j=1}^n \frac{3Q_j}{2\pi M_0} \cdot \left\{ \frac{2l_{ij}^2}{3l_{ij}^{6/2}} - \frac{2l_{ij}^2 + 3z_0^2}{3(l_{ij}^2 + z_0^2)^{3/2}} \right\} \quad (8)$$

Then, based on the determined distribution of reactions on the subsoil, settlement calculations were performed for each element in accordance with the principles of soil mechanics, assuming that the active zone would be determined in accordance with EC7 [18], for a rigid foundation up to the level at which:

$$s_i = s_{i,w} + s_{i,d} \quad (2)$$

gdzie:

$s_{i,w}$ – osiadanie własne i -tego punktu,

$s_{i,d}$ – osiadanie i -tego punktu wynikające z obciążenia pozostałych poletków [14,15,16].

Osiadanie własne obliczono wg wzoru:

$$s_{i,w} = \int_{z_{i,1}}^{z_{i,2}} \frac{\sigma_{i,w}}{M_0} = \frac{h_i}{M_0} \sigma_{i,w} \quad (3)$$

W przypadku podłoża jednorodnego zależność (3) można uprościć:

$$s_{i,w} = \frac{z_{0i}}{M_0} \sigma_{i,w} \quad (4)$$

gdzie:

z_0 – granica strefy aktywnej i -tego poletka [m];

$\sigma_{z,w}$ – naprężenia od obciążenia zewnętrznego dla i -tego poletka [kPa];

h_i – miąższość analizowanej warstwy [m];

M_0 – moduł ścisłości warstwy gruntu [kPa] [16].

W celu uwzględnienia wpływu sąsiednich pól na wartość osiadania i rozkład zaniku naprężeń w gruncie, a tym samym na parametr Winklera określony dla i -tego poletka, zastosowano równanie (5). Wyraża ono wartość jako funkcję odległości od analizowanego pola oraz miąższości rozpatrywanej warstwy podłoża.

$$s_{i,d} = \sum_{j=1}^n \frac{3Q_j}{2\pi M_0} \cdot \left\{ \frac{2l_{ij}^2 + 3z_{i1}^2}{3(l_{ij}^2 + z_{i1}^2)^{3/2}} - \frac{2l_{ij}^2 + 3z_{i2}^2}{3(l_{ij}^2 + z_{i2}^2)^{3/2}} \right\} \quad (5)$$

Zakładając, że granica strefy aktywnej jest stała pod całą powierzchnią płyty, możemy zapisać:

$$z_{i1} = 0 \quad (6)$$

oraz

$$z_{i2} = z_0 \quad (7)$$

Ostatecznie osiadanie dowolnego poletka gruntu jednorodnego wynikające z teorii Boussinesqa można po przekształceniu równania (5) wyliczyć z zależności [16]:

$$s_i = \frac{z_0}{M_0} \sigma_{i,w} + \sum_{j=1}^n \frac{3Q_j}{2\pi M_0} \cdot \left\{ \frac{2l_{ij}^2}{3l_{ij}^{6/2}} - \frac{2l_{ij}^2 + 3z_0^2}{3(l_{ij}^2 + z_0^2)^{3/2}} \right\} \quad (8)$$

Następnie, na podstawie wyznaczonego rozkładu reakcji na podłożu gruntowe, przeprowadzono obliczenia osiadania każdego z elementów zgodnie z zasadami mechaniki gruntów, zakładając, że strefa aktywna fundamentu sztywnego zostanie wyznaczona zgodnie z EC7 [18], do poziomu, na którym:

$$0,2\sigma_{z,y} = \sigma_{z,d} \quad (9)$$

For the adopted FEM mesh arrangement and an initially assumed constant value of the subgrade reaction coefficient, the nodal reactions should first be extracted. Based on these reactions, the settlement of each node can then be computed using equation (5). Knowing the settlement value and the load acting at a given point, the Winkler parameter can be determined from equation (1), after which the calculated values may be introduced into the software used for the static analysis. Subsequently, the nodal reactions can be read again, and another iteration of the k_s parameter can be performed, continuing this process until the results become stabilised.

Model verification

An analysis was carried out for a homogeneous subsoil composed of medium, moist sand with a relative density $I_D = 0,5$. The soil was assumed to have a constant constrained modulus M_0 of 73 584 kPa as the input parameter [17]. Calculations were performed for a foundation slab with plan dimensions of 11,42×8,14 m and a thickness of 0,25 m. The maximum settlement is approximately 20,5 mm and occurs beneath the centre of the slab, while the minimum settlement, found at the corners, is about 16,0 mm (figure 1). These values satisfy the serviceability limit state requirements according to EC7 [18].

Assuming that the slab is flexible and its vertical displacement equals the settlement of the soil, and taking into account the assumptions of Boussinesq's theory, a different deformation shape of the slab is obtained. Consequently, this leads to changes in the bending moments occurring within the slab. Based on the settlement calculated according to equation (8), the Winkler parameter k , representing the deformability of the soil, was determined using equation (1). The variation of the deformability values across the slab surface is shown in Figure 2. The maximum value is 6 233 kN/m³, and the minimum is 4 874 kN/m³.

With constant stress, the shape of the deformability curve follows a similar pattern to the settlement curve. The ratio between the maximum and minimum computed deformability values is 1,28, which indicates that an averaged, constant k value should not be assumed over the entire surface of the slab.

The calculated values of the k_s parameter at each node of the analysed slab can then be introduced into the computational software by averaging the Winkler constant over the area of each finite element. This yields vertical displacements of the slab from the static analysis that are close to the settlements computed using equation (8).

$$0,2\sigma_{z,y} = \sigma_{z,d} \quad (9)$$

W przypadku przyjętego układu siatki MES oraz stałej wartości współczynnika podatności należy odczytać reakcję w węzłach i następnie na tej podstawie można obliczyć osiadanie każdego z węzłów, stosując równanie (5). Znając wartość osiadania oraz działające w punkcie obciążenie, można wyznaczyć parametr Winklera z równania (1), a następnie wprowadzić obliczone wartości do programu pozwalającego na przeprowadzenie obliczeń statycznych. W dalszej kolejności możemy ponownie odczytać reakcję w węzłach i przeprowadzić kolejną iterację parametru k_s , aż do ustabilizowania się otrzymywanych rezultatów.

Weryfikacja modelu

Przeprowadzona została analiza podłoża jednorodnego z piasku średniego, wilgotnego o $I_D = 0,5$. Grunt ma stały moduł ścisłości M_0 , wynoszący 73 584 kPa, jako parametr wyjściowy [17]. Przeprowadzono obliczenia dla płyty fundamentowej o wymiarach w planie 11,42×8,14 m oraz grubości 0,25 m, poddanej obciążeniu równomiernie rozłożonemu 100 kPa z uwzględnieniem ciężaru własnego.

Ze względu na stałe warunki gruntowe oraz równomiernie rozłożone obciążenie, przyjęto podział analizowanego obszaru na 63 prostokątne elementy skończone. Taki dobór siatki obliczeniowej pozwolił na zachowanie optymalnego kompromisu między dokładnością a efektywnością obliczeń numerycznych. Przyjmując początkowo stałą wartość współczynnika podatności równą 11000 kN/m³, otrzymano osiadanie równomierne pod całą powierzchnią płyty, wynoszące 9,09 mm.

Na rysunku 1 przedstawiono przebieg osiadania obliczonego na podstawie równania (8). W analizowanym przypadku równanie (9) spełnione jest w przypadku głębokości 10 m p.p.t. Maksymalna wartość osiadania wynosi ok. 20,5 mm i znajduje się pod środkiem płyty, a najmniejsza jest w narożach i wynosi ok. 16,0 mm, co spełnia warunki stanu granicznego użyteczności wg EC7 [18].

Przy założeniu, że płyta jest podatna i jej przemieszczenie pionowe będzie równe osiadowi podłoża gruntowego, uwzględniając założenia teorii Boussinesqa, otrzymamy inną postać odkształcenia płyty. W konsekwencji prowadzi to do zmiany wartości momentów zginających występujących w płycie. Na podstawie osiadania obliczonego wg równania (8) wyznaczono, zgodnie z zależnością (1), wartość parametru Winklera k określającą podatność podłoża gruntowego. Zmianę wartości podatności na powierzchni płyty przedstawiono na rysunku 2. Maksymalna wartość to 6233 kN/m³, a minimalna 4874 kN/m³.

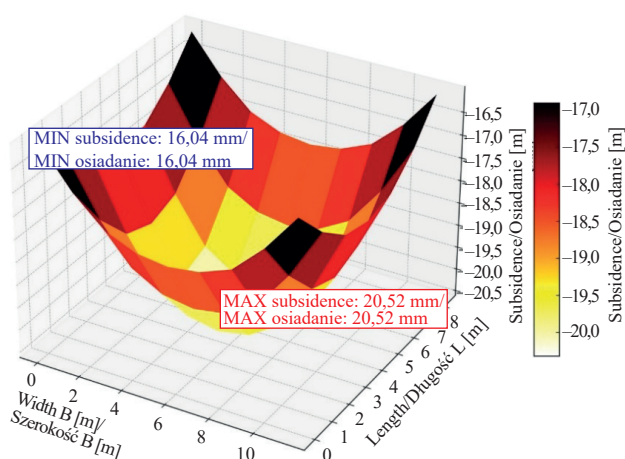


Fig. 1. Calculated settlement
Rys. 1. Obliczone osiadania

The mean error of the solution, accounting for settlement at the nodes – and therefore for the entire set of analysed points – is 3.16%. Figures 3 and 4 show the distributions of the bending moments M_{xx} and M_{yy} in the slab, which incorporate the settlement calculated using equation (8). Figures 5 and 6 present the bending moment diagrams along the midsections of the slab.

The maximum absolute value of the calculated bending moment is 7.46 kNm/m in the x -direction and 8.22 kNm/m in the y -direction. Accounting for the computed deformation pattern of the soil made it possible to determine the bending moments generated by the difference between the settlement

at the slab edges and the settlement at its centre. If a uniform value of the k_s parameter were assumed, the calculated bending moments in this case would be equal to zero, because the slab would experience identical vertical displacement at every point under uniformly distributed loading. This would result in no deformation and, consequently, an underestimation of the bending moments.

By considering the spatial variability of the Winkler parameter in the structural analysis software, the deformation shape of the slab resulting from soil settlement can be represented more accurately. This should enable a more precise determination of the distribution of internal forces in the analysed foundations.

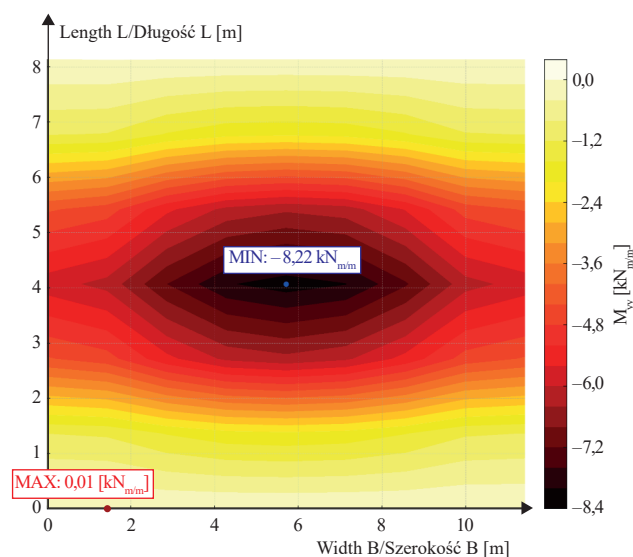


Fig. 3. Map of bending moments M_{yy}
Rys. 3. Mapa momentów zginających M_{yy}

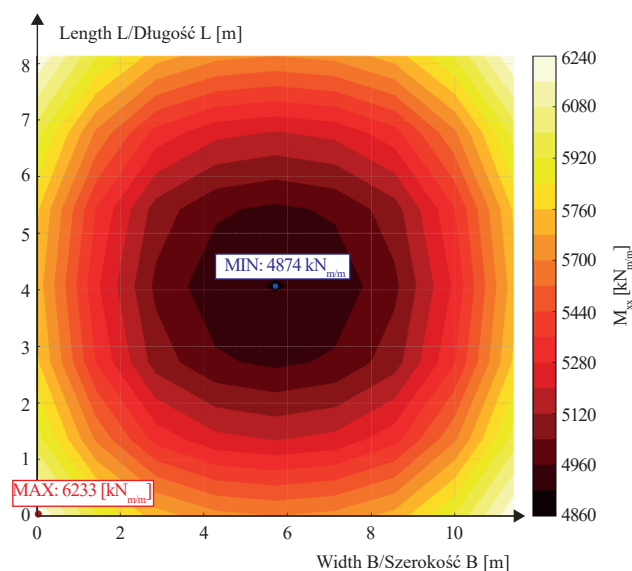


Fig. 2. Map of coefficient of subgrade reaction modulus k_s for analysed slab

Rys. 2. Mapa wartości współczynnika podatności podłoża k_s analizowanej płyty

Przy stałej wartości naprężeń przebieg wykresu określającego podatność będzie zbliżony do przebiegu wykresu osiadania. Proporcja między maksymalną a minimalną obliczoną podatnością wynosi 1,28, co prowadzi do wniosku, że nie należy przyjmować uśrednionej, stałej wartości podatności pod całą powierzchnią płyty.

Obliczone wartości parametru k_s w każdym z węzłów analizowanej płyty można następnie wprowadzić do programu obliczeniowego, uśredniając wartość stałej Winklera na obszarze elementu skończonego. Prowadzi to do uzyskania przemieszczeń pionowych płyty, wynikających z obliczeń statycznych zbliżonych do osiadania obliczonego wg zależności

(8). Średni błąd rozwiązania, uwzględniający osiadanie w węzłach, a tym samym całego zbioru analizowanych punktów, wynosi 3,16%. Na rysunkach 3 i 4 przedstawione zostały rozkłady momentów zginających M_{xx} i M_{yy} płyty, które uwzględniają osiadanie obliczone wg równania (8). Na rysunkach 5 i 6 przedstawiono wykresy momentów na przekrojach w środku płyty.

Maksymalna wartość bezwzględna obliczonego momentu zginającego wynosi 7,46 kNm/m w kierunku x , oraz 8,22 kNm/m w kierunku y . Uwzględnienie obliczonego kształtu odkształcenia podłoża gruntowego umożliwiło wyznaczenie wartości momentów zginających, powstałych na skutek różnicy między osiadaaniem krawędzi, a środka płyty. W przypadku przyjęcia jednako-

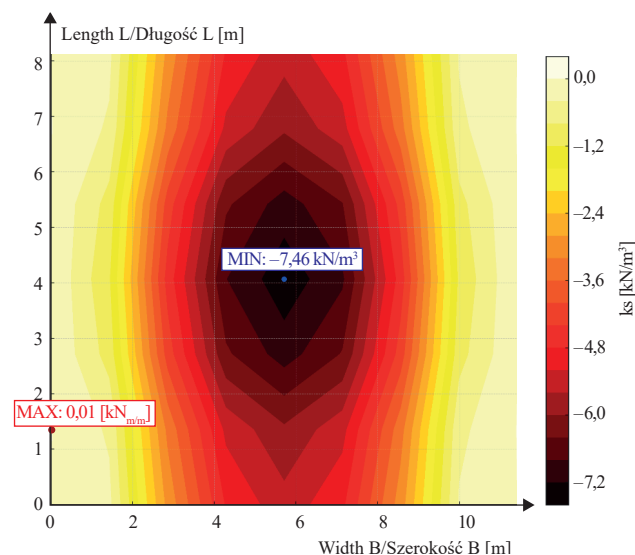


Fig. 4. Map of bending moments M_{xx}
Rys. 4. Mapa momentów zginających M_{xx}

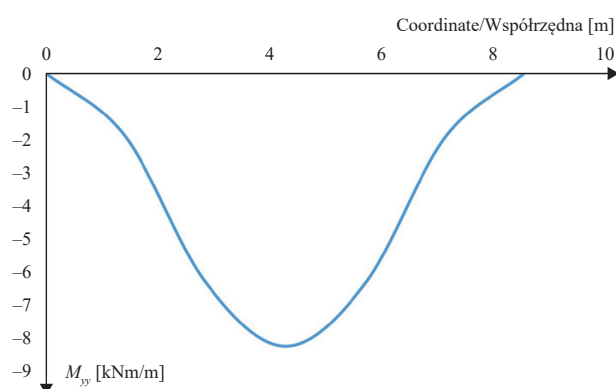


Fig. 5. Bending moment M_{yy} at the center of the slab
Rys. 5. Momenty zginające M_{yy} w środku płyty

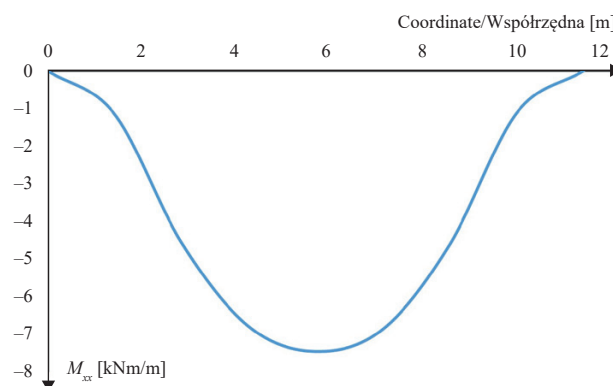


Fig. 6. Bending moment M_{xx} at the center of the slab
Rys. 6. Momenty zginające M_{xx} w środku płyty

Summary

Methods for incorporating the Winkler parameter into the calculation of building foundations remain an ongoing scientific and engineering challenge. The analysis presented in this article was conducted for a homogeneous subsoil and a uniformly distributed load acting over the entire surface of the slab. The calculations involve determining the subgrade reaction coefficient based on the settlement computed beneath the slab in accordance with Boussinesq's theory, which made it possible to obtain the spatial variation of the k parameter. A practical algorithm was proposed for integrating these results into the FEM environment by averaging the local k values at the finite element level. The procedure can be summarised as follows:

- defining the geometry of the slab and the subsoil, the load distribution, and the finite-element mesh;
- assuming an initial uniform value of k_s based on literature data or a preliminary estimate;
- performing the static analysis, then extracting the nodal reactions and determining the contact stresses;
- identifying the active zone and calculating the nodal settlement using equation (5);
- updating the subgrade reaction coefficient at each node based on the calculated settlement and the load acting at the corresponding mesh point;
- implementing the updated k_s values into the software used for static calculations;
- extracting the nodal reactions again and performing subsequent iterations of the k_s parameter until the results stabilise.

Settlement in a homogeneous soil, calculated according to Boussinesq's theory, shows significant spatial variability across the foundation slab, resulting in changes in the k_s value of up to 28%. Using a variable k_s parameter in the FEM analysis enables a realistic representation of the slab – subsoil interaction, reducing the mean settlement reproduction error to 3,16%, which in turn leads to a more accurate estimation of internal bending moments within the structure.

The numerical analyses presented indicate that introducing spatial variability of the Winkler parameter beneath the slab allows the actual deformation of the slab to be reflected in the calculations, which directly affects the resulting bending moments.

jących w analizowanym przypadku byłyby równe zero, ponieważ płyta w każdym punkcie uległaby takiemu samemu przemieszczeniu na skutek jednakowego obciążenia całej powierzchni. Skutkowałoby to brakiem odkształcenia i w konsekwencji niedoborem obliczonych momentów zginających. Uwzględniając niejednorodność parametru Winklera można precyzyjniej odwzorować postać odkształcenia płyty w programie do obliczeń statycznych, wynikającą z osiadania podłoża, co powinno umożliwić precyzyjniejsze określenie rozkładu sił wewnętrznych w analizowanych fundamentach.

Podsumowanie

Sposoby uwzględnienia parametru Winklera w obliczeniach fundamentów konstrukcji budowlanych są ciągle aktualnym problem naukowym oraz inżynierskim.

Przedstawiona w artykule analiza przeprowadzona została w przypadku jednorodnego podłoża gruntowego oraz równomiernie rozłożonego obciążenia na całej powierzchni płyty. Obliczenia polegają na wyznaczeniu współczynnika podatności podłoża gruntowego na podstawie wyznaczonego osiadania pod powierzchnią płyty zgodnie z teorią Boussinesqa, co umożliwiło uzyskanie rozkładu zmienności parametru k . Zaproponowano praktyczny algorytm integracji wyników do środowiska MES przez uśrednianie lokalnych wartości k na poziomie elementów skończonych. Obliczenia można przedstawić, stosując:

- definicję geometrii płyty oraz podłoża, rozkład obciążenia oraz podział na siatkę elementów skończonych;
- przyjęcie jednolitej stałej wartości początkowej k_s na podstawie literatury bądź wstępnego oszacowania;
- przeprowadzenie obliczeń statycznych, a następnie odczytanie reakcji w węzłach i określenie naprężeń kontaktowych,
- określenie strefy aktywnej oraz obliczenie osiadania w węzłach wg równania (5);
- aktualizację wartości współczynnika podatności podłoża gruntowego w każdym z węzłów z uwzględnieniem wyznaczonych wartości osiadania i obciążenia w danym punkcie siatki;
- wprowadzenie określonych wcześniej wartości k_s do programu pozwalającego na przeprowadzenie obliczeń statycznych;

Further analyses will focus on applying the proposed method to more complex computational scenarios in which the loading may also be non-uniform and the subsoil heterogeneous. Future studies conducted on a larger set of boundary conditions may lead to more general conclusions that could be implemented in engineering design software. This could significantly improve the modelling of soil – structure interaction in designs where the Winkler model is used to represent the subsoil.

• odczytanie reakcji w węzłach i przeprowadzenie kolejnej iteracji parametru k_s , aż do ustabilizowania się otrzymywanych rezultatów.

Osiadanie w gruncie jednorodnym, obliczone zgodnie z teorią Boussinesqa, wykazuje istotną zmienność w planie płyty fundamentowej, co skutkuje zmianami wartości k_s rzędu 28%. Użycie zmiennego parametru k_s w analizie MES pozwala na realistyczne odwzorowanie współpracy płyta – podłoże, redukując średni błąd odwzorowania osiadania do poziomu 3,16%, co przekłada się na dokładniejsze oszacowanie momentów wewnętrznych w konstrukcji.

Opisane badania numeryczne wskazują, że uzmiennienie parametru Winklera pod powierzchnią płyty pozwala na uwzględnienie w obliczeniach rzeczywistego odkształcenia płyty, co ma wpływ na wartość momentów zginających.

Dalsze analizy będą dotyczyły wykorzystania przedstawionej metody w bardziej złożonych przypadkach obliczeniowych, w których obciążenie może być również nierównomierne, a podłoże niejednorodne. Przyszłe badania przeprowadzone na większej liczbie sytuacji obliczeniowych mogą pozwolić na uzyskanie bardziej uniwersalnych wniosków, które umożliwią implementację rozwiązań w stosowanych przez inżynierów programach wspomagania komputerowego. Mogłoby to w istotny sposób usprawnić obliczenia konstrukcji, prowadzone z wykorzystaniem modelu Winklera, do opisu podłoża gruntowego.

Received: 04.08.2025
Revised: 30.09.2025
Published: 23.12.2025

Artykuł wpłynął do redakcji: 04.08.2025 r.
Otrzymano poprawiony po recenzjach: 30.09.2025 r.
Opublikowano: 23.12.2025 r.

Literature

- [1] Terzaghi K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction, *Geotechnique*, vol. 5, no 4, 1955, pp. 297–326.
- [2] Biernatowski K. Fundamentowanie, Warszawa: PWN, 1984.
- [3] Dembicki E, Biernatowski K i in., *Fundamentowanie. Projektowanie i wykonawstwo*, Tom 2, Warszawa: PWN, 1984.
- [4] Vesic AB. Beams on elastic subgrade and the Winkler's hypothesis, in Proc. of 5th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Eng., Vol. 1, 1961.
- [5] Bowles JE, Guo Y. Foundation Analysis and Design, vol. 5, New York: McGraw-Hill, 1996.
- [6] Lee HP. Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass, *Applied Acoustics*, vol. 55, no. 3, 1998, pp. 203–215.
- [7] Pantelidis L. The equivalent modulus of elasticity of layered soil mediums for designing shallow foundations with the Winkler spring hypothesis: A critical review, *Engineering Structures*, vol. 201, p. 109452, 2019.
- [8] Alpaslan N. Comparison of subgrade reaction coefficient values obtained with different approaches in soil investigations, *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, vol. 21, 2021, pp. 223–229.
- [9] Olszewska M. Zmienność współczynnika podatności podłoża pod płytą fundamentową, *Inżynieria Morska i Geotechnika*, 2016, pp. 215–219.
- [10] Avci B, Gurbuz A., Modulus of subgrade reaction that varies with magnitude of displacement of cohesionless soil, *Arabian Journal of Geosciences*, vol. 11, 2018, pp. 1–8.
- [11] Sadrekarimi J, Akbarzad M. Comparative study of methods of determination of coefficient of subgrade reaction, *Electron. J. Geotech. Eng.*, vol. 14, no. 1, 2009, pp. 45–61.
- [12] Bogusz W, Godlewski T, Kociniak M. Posadowienie chłodni kominowej w skomplikowanych warunkach geotechnicznych, *Materiały Budowlane*, 2016: 5: 26–27.
- [13] Koltuk S, Topçu S. Determination of Subgrade Reaction Modulus Considering the Relative Stiffnesses of Soil–Foundation Systems, *Applied Sciences*, vol. 15, no. 9, 2025, p. 4714.
- [14] Boussinesq J. Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques, Paris: Gauthier-Villars, 1885.
- [15] Wiłun Z. Zarys geotechniki, Warszawa: Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, 2013.
- [16] Olszewska M. Analiza numeryczna współczynnika podatności podłoża dla różnych nasypów przeciążających grunt jednorodny, XXIII Seminarium Naukowe z cyklu Regionalne Problemy Inżynierii Środowiska, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, 2016, pp. 91–106.
- [17] PN-81/B-03020: Grunty Budowlane, Posadowienie bezpośrednie budowli, Obliczenia statyczne i projektowanie.
- [18] PN-EN 1997–1:2008, Projektowanie geotechniczne. Część 1: Zasady ogólne.