

mgr inż. Dawid Zmysłony¹⁾
 ORCID: 0009-0004-4447-6972
 dr inż. Czesław Bywalski^{1)*}
 ORCID: 0000-0003-0460-9000
 dr hab. inż. Roman Wróblewski¹⁾
 ORCID: 0000-0001-9472-2853

Review of simplified code-based methods for the consideration of second-order effects in slender RC columns

Przegląd uproszczonych normowych metod uwzględniania efektów II rzędu w smukłych słupach żelbetowych

DOI: 10.15199/33.2025.09.22

Abstract. A comparison of engineering methods for the determination of second order moments in columns is made. Similarities, differences and limitations of the methods are presented together with an example of a column calculation taking into account changes in column slenderness and compressive force. The analyses showed very large discrepancies in the obtained results depending on the methods used and indicated the possibility of overestimating second-order moments due to the formulation of the methods and the simplifications used.

Keywords: second-order effects; simplified methods; column; reinforced concrete; comparative analysis.

Streszczenie. Przeprowadzono porównanie inżynierskich metod wyznaczania momentów II rzędu w słupach żelbetowych. Przedstawiono podobieństwa, różnice i ograniczenia prezentowanych metod wraz z przykładem obliczeń słupa, uwzględniającym zmiany jego smukłości i siły ściskającej. Analizy wykazały bardzo duże rozbieżności uzyskanych wyników w zależności od zastosowanej metody oraz wskazały na możliwość przeszacowania momentów II rzędu, wynikającą z konstrukcji metod i stosowanych uproszczeń.

Słowa kluczowe: efekty drugiego rzędu; metody uproszczone; słup; żelbet; analiza porównawcza.

The application of the commonly used stiffening principle is not permissible in the case of slender members, since a safe design requires consideration of second-order effects. For this purpose, the structure is analyzed in its deformed configuration, in which vertical loads, acting with eccentricity, cause an increase in bending moments compared to those calculated according to first-order theory. This phenomenon is related to slenderness, which in reinforced concrete columns is most often expressed as [1]

$$\lambda = l_0/i \quad (1)$$

where:

l_0 – effective length (referred to in mechanics as the buckling length);
 i – radius of gyration of the uncracked concrete section, disregarding the presence of reinforcement.

The most accurate determination of second-order effects can be achieved through a geometrically nonlinear analysis of the entire structural system, e.g. by means of the general method [1], in which it is also possible to account for changes in member stiffness caused by physically nonlinear material properties, including section cracking and concrete creep. However, the general method is labor-intensive, often ambiguous (e.g. depending on convergence of the solution), and mathematically complex; therefore, simplified methods are most commonly used in engineering practice, such as the nominal stiffness method (NSM) and the nominal curvature method (NCM) [1],

Zastosowanie powszechnej zasady zeszywnienia jest nieuprawnione w przypadku smukłych elementów, ponieważ bezpieczne rozwiązanie wymaga uwzględnienia efektów II rzędu. W tym celu rozpatruje się konstrukcję w stanie odkształconym, w którym obciążenia pionowe, działając mimośrodowo, powodują zwiększenie wartości momentów względem obliczonych wg teorii I rzędu. Ma to związek ze smukłością, która w słupach żelbetowych wyrażona jest najczęściej jako [1]:

$$\lambda = l_0/i \quad (1)$$

gdzie:

l_0 – długość efektywna (nazywana w mechanice długością wyboczeniową);
 i – promień bezwładności niezarysowanego przekroju betonowego bez uwzględnienia w nim obecności zbrojenia.

Najdokładniej efekty II rzędu można ustalić na podstawie nieliniowej geometrycznej analizy pełnego ustroju konstrukcyjnego np. metodą ogólną [1], w której dodatkowo można uwzględnić m.in. zmianę sztywności elementów spowodowaną nieliniowymi fizycznymi właściwościami materiałów, w tym zarysowaniem przekroju i pęzaniem betonu. Metoda ogólna jest jednak pracochłonna, często niejednoznaczna (zależna np. od zbieżności rozwiązania) i skomplikowana matematycznie, dlatego w praktyce inżynierskiej najczęściej są wykorzystywane metody uproszczone, jak np. metoda nominalnej sztywności (MNS), metoda nominalnej krzywizny (MNK) [1], metoda powiększania momentu (MMM – ang. *Moment magnification method*) [2], czy stosowane

¹⁾ Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego
^{*)} Correspondence address: czeslaw.bywalski@pwr.edu.pl



the moment magnification method (MMM) [2], or their modifications applied in other national codes [3 ÷ 5]. A comparison of code-based methods with experimental results [6] shows that both ACI 318 and EC2 tend to overestimate second-order effects for highly slender columns. Nevertheless, simplified approaches provided in design standards are sufficient for most typical design cases, since they account for a larger influence (compared to the general method) of second-order effects, although this leads to reinforcement overdesign.

A crucial condition for the correct application of simplified methods is **the consideration of imperfections**. Not all simplified approaches account for their influence in the same manner. In EC2 [1] imperfections are included as an additional bending moment added to the first-order moment. In ACI 318 [2] imperfections are incorporated indirectly by introducing a minimum moment, which is not added to the first-order moment but rather replaces it if the first-order moment is too small; additionally, the utilization of axial load capacity must not exceed 80 – 85%. A similar solution is adopted in code [4]. By contrast, code [5] is limited to requiring that the cross-section be designed for a minimum bending moment. The Chinese code [3] incorporates the influence of imperfections directly in the expression for the amplification factor, by introducing an initial eccentricity.

Another very important factor is the correct assumption of the effective length. Pędziwiatr and Musiał [7] demonstrated that a characteristic feature of the simplified methods presented in [1] is that the calculation results depend significantly on the square of the ratio of the effective length to the effective depth of the column section. They also pointed out that in laterally loaded columns, the adoption of a fictitious value of the effective length may lead to a considerable overestimation of second-order effects.

In the following part of the paper, the simplified methods contained in the design codes of the European Union [1], the United States [2], China [3], New Zealand [4], and Hong Kong [5] are presented and compared.

Characterization of code-based simplified methods

Nominal Stiffness Method (NSM) [1] is based on the classical solution of the second-order equilibrium equation for a member subjected to axial compression and bending. The lateral displacement and the corresponding second-order moment follow from the nonlinear differential equilibrium equation of the beam, the solution of which – presented, among others, by Knauff and Klempka in [8] – leads to the expression for the moment magnification factor:

$$\psi_1 = 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \quad (2)$$

where:

β – depends on the moment distribution;

N_B – the Euler critical load determined using the nominal stiffness EI , which accounts for cracking, material nonlinearity, creep, and axial load;

N_{Ed} – design axial force.

w innych krajach ich modyfikacje [3 ÷ 5]. Porównanie metod normowych z wynikami badań doświadczalnych [6] wykazuje, że metody ACI 318 oraz EC2 przeszacowują efekty II rzędu w słupach o dużej smukłości. Uproszczone podejścia stosowane w normach są jednak wystarczające w większości typowych przypadków projektowych, ponieważ uwzględniają większy wpływ efektów II rzędu w porównaniu z metodą ogólną, ale prowadzą do przewymiarowania zbrojenia.

Ważnym warunkiem poprawnego stosowania metod uproszczonych jest **uwzględnienie imperfekcji**. Nie we wszystkich metodach uproszczonych ich wpływ jest uwzględniany w ten sam sposób. W EC2 [1] imperfekcje traktowane są jako dodatkowy moment zginający dodawany do momentu I rzędu. W ACI 318 [2] wpływ imperfekcji określany jest pośrednio przez wprowadzenie minimalnego momentu, który nie jest dodawany do momentu I rzędu, lecz zastępuje go, jeśli moment I rzędu jest zbyt mały. Dodatkowo wykorzystanie nośności przekroju, ze względu na siłę osiową, nie może przekroczyć 80 – 85%. Analogiczne rozwiązanie zastosowano w normie [4], natomiast norma [5] ogranicza się do zapisów wymagających projektowania przekroju na minimalny moment zginający. Norma chińska [3] uwzględnia wpływ imperfekcji bezpośrednio we wzorze na współczynnik amplifikacji, wprowadzając w nim mimośród początkowy.

Innym bardzo istotnym czynnikiem jest właściwe przyjęcie długości efektywnej. Pędziwiatr i Musiał [7] wykazali, iż charakterystyczne w przypadku metod uproszczonych przedstawionych w [1] jest to, że wyniki obliczeń bardzo istotnie zależą od kwadratu ilorazu długości efektywnej i wysokości użytecznej przekroju słupa. Wskazali także, iż w słupach obciążonych poziomo przyjęcie fikcyjnej wartości długości efektywnej może być źródłem znacznego przeszacowania efektów II rzędu.

W dalszej części artykułu przedstawiono i porównano metody uproszczone zawarte w normach stosowanych w Unii Europejskiej [1], Stanach Zjednoczonych [2], Chinach [3], Nowej Zelandii [4] i Hongkongu [5].

Charakterystyka normowych metod uproszczonych

Metoda nominalnej sztywności (MNS) [1] bazuje na klasycznym rozwiązaniu równania równowagi II rzędu w przypadku pręta poddanego ścisłaniu i zginaniu. Boczne przemieszczenie i odpowiadający mu moment II rzędu wynikają z nieliniowego równania różniczkowego równowagi belki, którego rozwiązanie – przedstawione m.in. przez Knauffa i Klempkę w [8] – prowadzi do zależności (2) na współczynnik powiększania momentu:

$$\psi_1 = 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \quad (2)$$

gdzie:

β – zależy od rozkładu momentów;

N_B – siła krytyczna Eulera wyznaczona przy użyciu nominalnej sztywności EI , uwzględniającej zarysowanie, nieliniowość materiałową, pełzanie i siłę osiową;

N_{Ed} – siła podłużna.



The nominal stiffness is treated as constant along the entire column length and is calculated according to the relations given in Table 1. The design bending moment including second-order effects is expressed as:

Nominalna sztywność traktowana jest jako stała na całej długości słupa i obliczana jest wg zależności przedstawionych w tabeli 1. Moment z uwzględnieniem efektów II rzędu określa się jako:

Table 1. Comparison of basic parameters of simplified methods for accounting for second-order effects in national codes

Tabela 1. Porównanie podstawowych parametrów uproszczonych metod uwzględniania efektów II rzędu w normach krajowych

Code/Parameter Norma/parametr	Calculation of Second-Order Moment/ Moment całkowity	Section Stiffness/ Sztywność przekroju	Effect of Creep/ Wpływ pełzania	Additional Limitations/ Dodatkowe ograniczenia
EN 1992-1-1 [1] (MNS) Europa	$M_{Ed} = M_{0Ed} \left(1 + \frac{\beta}{\frac{N_{Ed}}{N_B} - 1} \right)$	$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s$	$K_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}}$	not explicitly specified/ nie określono wprost
EN 1992-1-1 [1] (MKN) Europa	$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} e_2$	nie określono wprost	$K_\varphi = 1 + \beta \varphi_{ef}$	limited to symmetrically reinforced sections/ tylko dla przekrojów symetrycznie zbrojonych
ACI 318-19 [2] (MMM) USA	non-sway frames/układy nieprzesuwne $M_{Ed} = M_{0Ed} \left(\frac{C_m}{1 - \frac{N_{Ed}}{0,75 N_B}} \right)$ sway frames/układy przesuwne $M_{1,II} = M_{1n} + \delta_s M_{1s}$ $M_{2,II} = M_{2n} + \delta_s M_{2s}$ $\delta_s = \frac{1}{1 - Q} \geq 1 \text{ lub}$ $\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum N_{Ed}}{0,75 \sum N_B}} \geq 1$	$(EI)_{eff} = \frac{0,4 E_{cd} I_c}{1 + \beta_d}$ $(EI)_{eff} = \frac{0,2 E_{cd} I_c + E_s I_s}{1 + \beta_d}$ $(EI)_{eff} = \frac{E_c I}{1 + \beta_d}$	$1 + \beta_d$	M_{Ed} must not exceed $1.4 M_{0Ed}$ / moment M_{Ed} nie może być większy niż $1,4 M_{0Ed}$
GB 50010-2010 [3] Chiny	$M_{Ed} = C_m \eta_{ns} M_{0Ed}$ $\eta_{ns} = 1 + \frac{1300}{d} \left(\frac{M_{0Ed}}{N_{Ed}} + e_a \right) \left(\frac{l_0}{h} \right)^2 \zeta_c$	not explicitly specified/ nie określono wprost	not explicitly specified/ nie określono wprost	limited to symmetrically reinforced sections/tylko dla przekrojów symetrycznie zbrojonych
NZS 3101.1:2006 [4] Nowa Zelandia	non-sway frames/układy nieprzesuwne $M_{Ed} = M_{0Ed} \left(\frac{C_m}{1 - \frac{N_{Ed}}{0,75 N_B}} \right)$ sway frames/układy przesuwne/ not explicitly specified/nie określono wprost	$(EI)_{eff} = \frac{0,4 E_{cd} I_c}{1 + \beta_d}$ $(EI)_{eff} = \frac{0,2 E_{cd} I_c + E_s I_s}{1 + \beta_d}$	$1 + \beta_d$	no yielding allowed in ULS. Drift must satisfy $N_{Ed} \delta_0 \leq 0,05 V_{Ed} l$. Slenderness must not exceed 100/nie może dochodzić do uplastycznienia w SGN. Przesunięcie względne nie może przekroczyć $N_{Ed} \delta_0 \leq 0,05 V_{Ed} l$. Smukłość nie może przekroczyć 100.
Hongkong [5]	$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} \beta_a K h$ $\beta_a = \frac{1}{2000} \left(\frac{l_0}{b} \right)^2$ $K = \frac{N_{UZ} - N_{Ed}}{N_{UZ} - N_{bal}} \leq 1$	not explicitly specified/ nie określono wprost	not explicitly specified/ nie określono wprost	not explicitly specified/ nie określono wprost

Notation/Oznaczenia:

M_{Ed} – design value of the bending moment/całkowity moment zginający; M_{0Ed} – bending moment determined in accordance with the relevant code: first-order moment from structural analysis, possibly including the effect of imperfections/wartość momentu zginającego określana wg odpowiedniej normy; I rzędu z analizy statycznej ewentualnie powiększona o wpływ imperfekcji; N_{Ed} – design value of axial force/wartość obliczeniowa siły podłużnej; N_B – critical buckling load/siła krytyczna ze względu na wyboczenie; V_{Ed} – design value of shear force/obliczeniowa wartość siły ścinającej; M_{1n} , M_{2n} – design end moments not causing significant lateral displacement/wartości obliczeniowe momentów zginających na końcach słupa (niepowodujących znacznego przemieszczenia bocznego); M_{1s} , M_{2s} – design end moments causing significant lateral displacement/wartości obliczeniowe momentów zginających na końcach słupa (powodujące znaczne przemieszczenia boczne); e_2 – lateral deflection of the column/ugięcie słupa; β – coeff. depending on moment distribution/współczynnik zależny od rozkładu momentów; β_d – coeff. accounting for creep according to the relevant code/współczynnik uwzględniający wpływ pełzania wg odpowiedniej normy; K_c – coeff. accounting for cracking and creep effects/współczynnik zależny od wpływu zarysowania i pełzania; φ_{ef} – effective creep coeff. /efektywny współczynnik pełzania $\varphi_{ef} = \varphi_{(e, t_0)} M_{0Ed} / M_{Ed}$; K_s – coeff. accounting for reinforcement contribution/współczynnik uwzględniający udział zbrojenia; k_1 , k_2 – coeff. depending on concrete strength class, axial load level, and slenderness/współczynniki uwzględniające klasę wytrzymałości betonu, wpływ siły podłużnej i smukłość; C_m – coeff. depending on moment distribution/współczynnik zależny od rozkładu momentów; E_{cd} , E_s – design value of concrete modulus of elasticity and modulus of elasticity of steel/wartość modułu sprężystości betonu i modułu stali; l – column length/długość słupa; l_0 – buckling length (effective length) of the column/długość wyboczeniowa słupa; d – effective depth of the section/wysokość użyteczna przekroju; I_c – moment of inertia of the concrete section, defined according to the relevant code assumptions/moment bezwładności przekroju betonowego określany z uwzględnieniem założeń odpowiedniej normy; I_s – moment of inertia of the section about the centroidal axis/moment bezwładności przekroju względem osi centralnej; Q – stability factor for a storey (storey stability index)/współczynnik stateczności dla kondygnacji; δ_0 – relative displacement of the member ends (drift)/względne przemieszczenie końców elementu; e_a – unintended eccentricity/mimośród niezamierzony; h – larger cross-sectional dimension/większy wymiar przekroju; b – smaller cross-sectional dimension/mniejszy wymiar przekroju; ζ_c – curvature correction factor of the section/współczynnik korekcyjny krzywizny przekroju; N_{UZ} – design axial resistance of the cross-section subjected to pure axial load/obliczona nośność graniczna przekroju poddanego wyłącznie obciążeniu osiowemu; N_{bal} – axial force corresponding to the balanced failure condition (balanced axial load)/wartość N_{Ed} dla której osiąga się moment graniczny.

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \Psi_1 \quad (3)$$

where:

M_{0Ed} – first-order moment, including imperfections, as defined in [1].

Nominal Curvature Method (NCM) [1] is an additive method limited to symmetrically reinforced members [9]. The final design moment is obtained by summing the first-order moment including imperfections with an additional second-order moment:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} e_2 \quad (4)$$

The eccentricity e_2 can be related to the curvature and written as:

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{l^2}{\pi^2} \quad (5)$$

where: $1/r$ – the curvature of the member.

Standard [1] modifies expression (5) for different boundary conditions by introducing the effective length l_0 and a coefficient c depending on the curvature distribution:

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{c} \quad (6)$$

The nominal curvature $1/r$ is determined on the basis of cross-sectional strains and correction factors K_r and K_ϕ (see Table 1).

Moment Magnification Method (MMM). The starting point of the MMM [2] is the description of the increase in bending moments as an infinite geometric series:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + \alpha M_{0Ed} + \alpha^2 M_{0Ed} + \dots + \alpha^n M_{0Ed} \quad \alpha = \frac{N_{Ed}}{N_B - N_{Ed}} \quad (7)$$

where:

M_{0Ed} – according to [2], the first-order moment without amplification for imperfections.

By summing series (7), one obtains:

$$M_{Ed} = \frac{M_{0Ed}}{1 - \alpha} \quad (8)$$

In practice, [2] introduces the moment magnification factor δ , together with an additional safety factor ($\phi = 0.75$) and a coefficient C_m depending on the moment distribution:

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \frac{N_{Ed}}{\phi N_B}} \quad (9)$$

The total design moment including second-order effects is then calculated as:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \delta \quad (10)$$

For sway frames, the expressions used to calculate the magnification factor differ from (9) (see Table 1).

Modified NCM and MMM Methods. With respect to the NCM and MMM, the approaches adopted in [3 – 5] exhibit both conceptual similarities and formal differences. The Chinese code [3], in contrast to the MMM [2], does not explicitly expand the bending moment into a series but instead introduces two amplification factors:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \Psi_1 \quad (3)$$

gdzie:

M_{0Ed} – moment I rzędu powiększony o imperfekcje wg [1].

Metoda nominalnej krzywizny (MNK) [1] jest metodą addytywną, ograniczoną do elementów symetrycznie zbrojonych [9]. Końcowa wartość momentu jest wynikiem sumowania momentu I rzędu powiększonego o imperfekcje z dodatkowym momentem II rzędu:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} e_2 \quad (4)$$

Wartość mimośrodów e_2 można powiązać z krzywizną i zapisać w postaci:

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{l^2}{\pi^2} \quad (5)$$

gdzie: $1/r$ – krzywizna pręta.

Norma [1] modyfikuje zależność (5) w przypadku różnych warunków brzegowych, wprowadzając długość efektywną l_0 i współczynnik c zależny od rozkładu krzywizny:

$$e_2 = \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{c} \quad (6)$$

Krzywizna nominalna $1/r$ jest określana na podstawie odkształceń przekroju i współczynników korygujących K_r oraz K_ϕ (tabela 1).

Metoda powiększania momentu (MMM). Punktem wyjścia MMM [2] jest opis przyrostu momentów jako nieskończonego ciągu geometrycznego:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + \alpha M_{0Ed} + \alpha^2 M_{0Ed} + \dots + \alpha^n M_{0Ed} \quad \alpha = \frac{N_{Ed}}{N_B - N_{Ed}} \quad (7)$$

gdzie:

M_{0Ed} – wg [2] moment I rzędu niepowiększony o imperfekcje.

Sumując ciąg (7), otrzymuje się:

$$M_{Ed} = \frac{M_{0Ed}}{1 - \alpha} \quad (8)$$

W praktyce [2] posługuje się współczynnikiem powiększenia momentu δ , wprowadzając jednocześnie dodatkowy współczynnik bezpieczeństwa $\phi = 0.75$ oraz współczynnik C_m zależny od rozkładu momentów:

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \frac{N_{Ed}}{\phi N_B}} \quad (9)$$

Wówczas całkowity moment uwzględniający efekty II rzędu oblicza się ze wzoru:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \delta \quad (10)$$

W przypadku układów przesuwnych, zależności pozwalające obliczyć współczynnik powiększenia momentu są inne niż wynikające z (9), co pokazano w tabeli 1.

Zmodyfikowane metody MNK i MMM. Zasady przyjęte w [3 – 5] wykazują zarówno podobieństwa koncepcyjne, jak i różnice formalne w porównaniu z metodami MNK i MMM. Norma [3] w odróżnieniu od (MMM) [2], zamiast jawnego rozwinęcia momentów w szereg, wprowadza dwa współczynniki amplifikacji:



$$M_{Ed} = C_m \eta_{ns} M_{0Ed} \quad (11)$$

The coefficient η_{ns} serves a role analogous to the magnification factor δ in the MMM, representing the second-order effect, while C_m provides a correction for the distribution of end moments. Unlike the MMM, this method does not explicitly incorporate cross-sectional stiffness. Imperfections are directly accounted for in η_{ns} in the form of an additional unintended eccentricity; however, this does not result from curvature analysis but rather from a normative estimate.

The New Zealand code [4] represents the classical form of the MMM (see Table 1). It is worth noting that, whereas ACI 318 [2] distinguishes between sway and non-sway frames, the New Zealand standard [4] is limited to providing recommendations only for non-sway frames. The Hong Kong code [5], in turn, adopts a variant of the NCM. Second-order effects are included through direct calculation of the additional moment:

$$M_{add} = N_{Ed} a_u \quad (12)$$

where the displacement $a_u = \beta_a K h$ results from the slenderness of the member. In addition, the correction factor K , which accounts for the degree of utilization of the cross-sectional capacity by the axial force, plays a role similar to the coefficient K_r in NCM [1]. In practice, [5] therefore refers to a simplified curvature model. According to [5] imperfections are not included in the first-order moments.

Comparison of methods

Assumptions. The differences between the methods were illustrated using the example of an interior column extracted from a two-span frame (sway frame according to [1]) (Figure 1). A series of simplifying assumptions were adopted (Table 2 and Figure 1), including: the buckling length factor $\mu = 2,0$ (determined in a simplified manner, as commonly applied in engineering practice, i.e. based on Annex C of [10] – a column in a single-story industrial building without an overhead crane, with a flexible roof system, fixed at the foundation base and connected to the roof structure by a hinged joint), taken as identical for all cases; a linearly varying first-order bending moment distribution, and a constant moment over the column height in the quasi-permanent combination M_{0Eqp} . Such moment distributions may result from wind actions and unequal reactions of adjacent roof girders, caused, for example, by different load factors (1.00 and 1.35) assigned to permanent loads in the relevant ULS combination. The values of axial load were varied as $N_{Ed} = 857, 4300$ and 6850 kN (corresponding to relative axial load levels $n = N_{Ed}/f_{cd}bh = 0,1, 0,5$ i $0,8$) and the slenderness was modified by changing the frame height L . Concrete properties were assumed as class C30/37 according to [1] for all cases, and reinforcement with identical yield strength f_{yk} and a constant, symmetric reinforcement ratio $\rho = \rho_1 + \rho_2 = (A_{s1} + A_{s2})/bh = 2\%$.

The results obtained from simplified methods are presented in the example of the support moment M_{02} , since in sway frames columns are designed either for increased joint moments or for the amplified equivalent moment M_{0Ed} (if greater) [11].

$$M_{Ed} = C_m \eta_{ns} M_{0Ed} \quad (11)$$

Współczynnik η_{ns} pełni funkcję odwzorowującą efekt II rzędu analogicznie jak współczynnik δ w MMM, natomiast C_m odpowiada korekcie rozkładu momentów podporowych. Sama metoda nie uwzględnia wprost sztywności przekroju, co odróżnia ją od MMM. Z kolei imperfekcje są uwzględniane wprost w η_{ns} jako dodatkowy mimośród niezamierzony, choć nie wynika on bezpośrednio z analizy krzywizny, lecz z normatywnego oszacowania.

Podejście nowozelandzkie [4] reprezentuje klasyczną formę MMM (tabela 1). Warto podkreślić, że podczas, gdy norma ACI 318 [2] rozróżnia układy przesuwne i nieprzesuwne, norma nowozelandzka [4] ogranicza się wyłącznie do podania zaleceń dotyczących układów nieprzesuwnych. Z kolei norma Hongkongu [5] przyjmuje wariant metody MNK. Efekty II rzędu uwzględniane są przez bezpośrednie obliczenie dodatkowego momentu:

$$M_{add} = N_{Ed} a_u \quad (12)$$

gdzie przemieszczenie $a_u = \beta_a K h$ wynika ze smukłości elementu. Dodatkowo współczynnik korekcyjny K , który uwzględnia stopień wykorzystania nośności przekroju przez siłę osiową, pełni funkcję podobną do współczynnika K_r w MNK [1]. W praktyce [5] odwołuje się więc do uproszczonego modelu krzywizny. Według [5] imperfekcje nie są uwzględniane w momentach I rzędu.

Porównanie metod

Założenia. Różnice pomiędzy metodami przedstawiono na przykładzie słupa środkowego, wydzielonego z ramy dwunawowej (układ przesuwny wg [1] – rysunek 1). Przyjęto wiele założeń upraszczających (tabela 2 i rysunek 1), w tym: wartość współczynnika długości wybozeniowej $\mu = 2,0$ (przyjęto w sposób uproszczony, jaki zwykle stosuje się w praktyce inżynierskiej, tj. na podstawie zapisów załącznika C do normy [10] – słup w jednokondygnacyjnym budynku halowym bez suwnicy, z dachem z elementów wiotkich, utwierdzony w stopie fundamentowej i połączony z konstrukcją dachu w sposób przegubowy); jednakowy we wszystkich przypadkach liniowo zmieniający się rozkład momentów I rzędu; stały moment na wysokości słupa w kombinacji quasi-stałej M_{0Eqp} . Takie rozkłady momentów mogą wynikać z oddziaływań wiatru i nierównych reakcji sąsiednich dźwigarów dachowych, spowodowanych np. różnymi współczynnikami obciążenia (1,00 i 1,35), przypisanymi obciążeniami stałym w danej kombinacji SGN. Modyfikowano wartości siły podłużnej $N_{Ed} = 857, 4300$ i 6850 kN (względna siła $n = N_{Ed}/f_{cd}bh = 0,1, 0,5$ i $0,8$) oraz smukłość przez zmianę wysokości ramy L . Przyjęto, iż beton będzie miał we wszystkich obliczeniach parametry klasy C30/37 wg [1], podobnie jak zbrojenie taką samą granicę plastyczności f_{yk} i stałe, symetryczne pole powierzchni $\rho = \rho_1 + \rho_2 = (A_{s1} + A_{s2})/bh = 2\%$.

W artykule przedstawiono wyniki uzyskane z metod uproszczonych na przykładzie momentu podporowego M_{02} , ponieważ w układach przesuwnych słupy projektuje się na powiększone momenty węzłowe albo na powiększony moment ekwiwalentny M_{0Ed} (jeśli jest większy) [11].



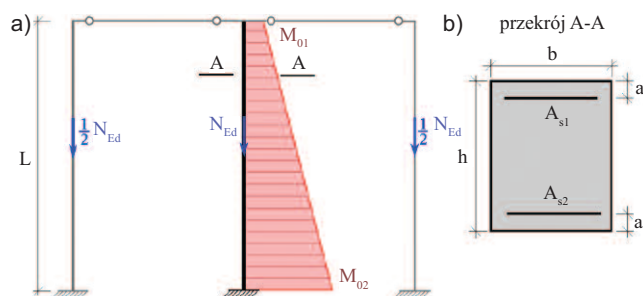


Fig. 1. Longitudinal force system in the frame columns with the assumed bending moment distribution (a) and the cross-section of the central column (b)

Rys. 1. Układ sił podłużnych w słupach ramy wraz z założonym rozkładem momentu zginającego (a) i przekrojem poprzecznym w słupie środkowym (b)

Results and Discussion. In Figs. 2, 3, and 4, the results of calculations for code [4] are shown with a dashed line, as this code does not provide explicit guidelines for the design of columns in sway frames. The presented values were therefore calculated using the relations applicable to non-sway frames. Similarly, for [2] the range $M_{Ed} > 1,4 M_{0Ed}$ lies outside the scope of the method and is also indicated with a dashed line.

The increments of bending moments (relative to the first-order moments) resulting from second-order effects, shown in Figures 2, 3, 4, depend on the slenderness and the relative axial load n , particularly in the case of [3, 4, 5]. For a low axial load level of $n = 0.1$ (Figure 2) and $\lambda < 190$ the increase in bending moment due to second-order effects is comparable for the MMM and NSM. In the case of [4] agreement with MMM and NSM is observed up to approximately $\lambda \approx 105$. At the same time, MMM and NSM provide the smallest increase in moment, about 1 – 3 times in the range $\lambda < 190$. For the remaining methods, distinct discrepancies are visible across the entire slenderness range. It is worth noting that the NCM yields a significantly larger increase in moment compared to the NSM for this case. For higher values of n , the proportion reverses,

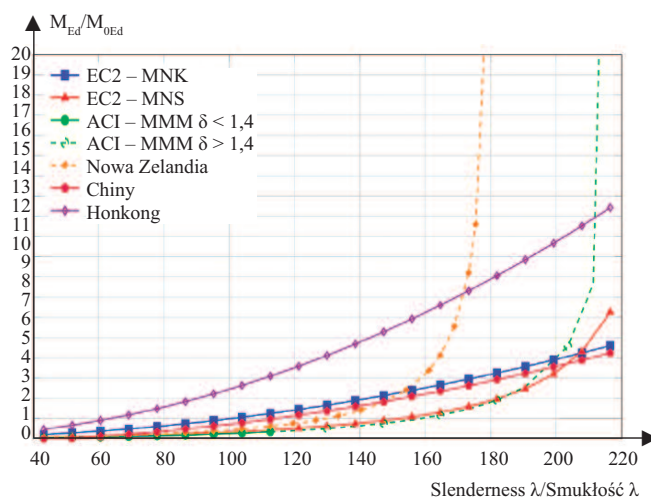


Fig. 2. Graphs of the M_{Ed}/M_{0Ed} ratio as a function of slenderness λ for relative axial force $n = 0,1$

Rys. 2. Zależność M_{Ed}/M_{0Ed} od smukłości λ przy sile względnej $n = 0,1$

Table 2. Assumptions adopted for the calculations

Tabela 2. Założenia przyjęte do obliczeń

$b \times h$ [m]	L [m]	μ [-]	λ [-]	a [m]	$\rho_1 = \rho_2$ [%]	E_s [GPa]	f_{yk} [MPa]	E_{cm} [GPa]	f_{ck} [MPa]
0,50 x 0,80	varies from 5.0 to 25.0/ zmienne od 5,0 do 25,0	2,0	varies from 43.3 to 216.5/ zmienne od 43,3 do 216,5	0,05	1,00	200	500	32	30
M_{01} [kNm]	M_{02} [kNm]	M_{0Ed} [kNm]	M_{0Eap} [kNm]	$\varphi(\infty; t_0)$ [-]	φ_{ef} [-]				
50	300	200	37	2,1	0,39				

Wyniki i dyskusja. Wyniki obliczeń wg normy [4] przedstawiono na rysunkach 2, 3 i 4 linią przerywaną, ponieważ nie zawiera ona wytycznych obliczeń dotyczących słupów w układach przesuwnych. Wartości obliczono z wykorzystaniem zależności dla układów nieprzesuwnych. Podobnie w przypadku [2], $M_{Ed} > 1,4 M_{0Ed}$ wykacza poza obszar stosowania metody i został oznaczony linią przerywaną.

Przedstawiony na rysunkach 2, 3 i 4 przyrost momentów zginających (względem momentów I rzędu), wynikający z efektów II rzędu, zależy od smukłości i względnej siły podłużnej n , szczególnie w przypadku [3, 4, 5]. Przy wartości $n = 0,1$ (rysunek 2) i $\lambda < 190$ wzrost momentu wynikający z efektów II rzędu jest zbliżony w przypadku MMM i MNS, a zgodność z MMM i MNS jest widoczna do $\lambda \approx 105$ [4]. Jednocześnie MMM i MNS podają najmniejszy wzrost momentu, tj. jedno – do ok. trzykrotny w zakresie $\lambda < 190$. W przypadku pozostałych metod widoczne są wyraźne rozbieżności w całym zakresie smukłości. Należy podkreślić, że MNK daje w tym przypadku dużo większy wzrost momentu niż MNS. Z kolei przy większych wartościach n proporcja ta się odwraca i mniejszy wzrost daje MNK, co jest widoczne dla $\lambda > 100$ przy $n = 0,5$ (rysunek 3)

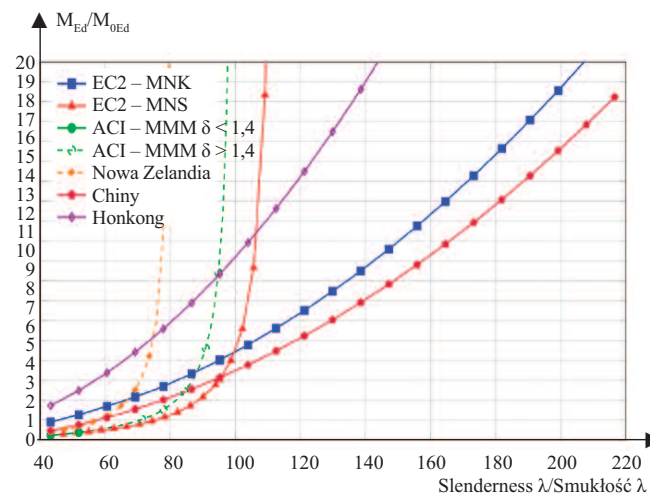


Fig. 3. Graphs of the M_{Ed}/M_{0Ed} ratio as a function of slenderness λ for relative axial force $n = 0,5$

Rys. 3. Zależność M_{Ed}/M_{0Ed} od smukłości λ przy sile względnej $n = 0,5$



and the NCM produces smaller increases than the NSM, which is evident for $\lambda > 100$ at $n = 0.5$ (Figure 3) and for $\lambda > \sim 80$ at $n = 0.8$ (Figure 4). In these cases, the NSM can no longer be applied to slender columns, as it leads to unrealistically large increases in moments. A similar trend is observed for [2, 4].

As noted by de Araújo [12] and Pędziwiatr and Musiał [7], a major drawback of the NSM is the sharp increase in ψ_1 as N_{Ed} approaches N_B , which makes the method unreliable for slender or heavily compressed columns. Similarly, Koziński and Winnicki [13] found, based on their own investigations, that this method overestimates lateral displacements by several times. The same authors also concluded that the MMM [2] provides the best estimate of experimental results, although in their case the tests involved biaxial bending, unlike the example analyzed here.

The performed calculations (Figures 3 and 4) also confirm the observations of Pędziwiatr and Musiał [7], that the NSM predicts a rapid increase in second-order moments when the axial force N_{Ed} approaches the value of N_B , which may lead to an overestimation of M_{Ed} under high axial load ratios. In contrast, the MMM [2] limits the magnification factor δ to a maximum value of 1.4, which prevents such an excessive increase in bending moments. It was also observed that for slender columns ($\lambda \geq 52,5 + 0,75f_{ck}$) subjected to long-term loads, the NCM may underestimate the influence of second-order effects, since creep effects are then neglected (with the factor $K_\phi = 1$). This expression is a reformulation of the relation given directly under Eq. (5.37) in EC2 [1], assuming $\beta = 0$; f_{ck} is to be substituted in MPa. The problem of underestimation of second-order effects was also reported in [13]. Furthermore, [12] even postulates a revision of the relation defining K_ϕ , and for columns subjected to sustained loads recommends the inclusion of an additional eccentricity e_c according to the model in [14].

In calculations based on the Chinese code [3], the moment increase reaches its maximum at $n = 0.5$. Such behavior is not observed in the other methods, where the relations $M_{Ed}(N_{Ed})$ increases monotonically.

Conclusions

The differences between the results obtained from the analyzed methods are very large and increase with slenderness, while there is a lack of broader confirmation of their accuracy in experimental research or by means of more advanced solutions. This limits the applicability of these methods to the design of slender columns.

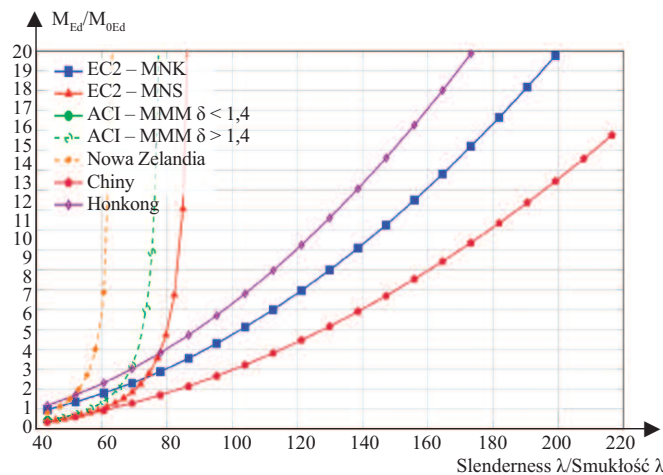


Fig. 4. Graphs of the M_{Ed}/M_{0Ed} ratio as a function of slenderness λ for relative axial force $n = 0,8$

Rys. 4. Zależność M_{Ed}/M_{0Ed} od smukłości λ przy sile względnej $n = 0,8$

i $\lambda > \sim 80$ przy $n = 0,8$ (rysunek 4), przy czym MNS nie może już być zastosowana do smukłych słupów ze względu na niewiarygodnie duży wzrost momentów. Podobnie jest w przypadku [2, 4].

Jak zauważyli de Araújo [12] oraz Pędziwiatr i Musiał [7], istotną wadą MNS jest duży wzrost ψ_1 przy zbliżaniu się N_{Ed} do N_B , co czyni metodę niewiarygodną w przypadku smukłych lub silnie ściśniętych słupów. Z kolei Koziński i Winnicki [13] stwierdzili, na podstawie własnych badań, że ta metoda przesza-

cowuje kilkakrotnie przemieszczenia poziome. Ci sami autorzy uważają również, że metoda MMM [2] daje najlepsze oszacowanie wyników badań, które jednak, w odróżnieniu od analizowanego przykładu, dotyczyły zginania dwukierunkowego.

Wykonane obliczenia (rysunki 3 i 4) potwierdzają także spostrzeżenia Pędziwiatra i Musiała [7], że MNS wskazuje gwałtowny wzrost momentów II rzędu, gdy siła osiowa N_{Ed} zbliża się do wartości N_B , co może prowadzić do przeszacowania M_{Ed} przy wysokim udziale siły podłużnej. W przeciwieństwie do tego, MMM [2] ma ograniczenie współczynnika δ do maksymalnej wartości 1,4, co zapobiega tak gwałtownemu wzrostowi momentów. Zauważono także, że w przypadku smukłych słupów ($\lambda \geq 52,5 + 0,75f_{ck}$), poddanych długotrwałym obciążeniom, MNK może zaniżać wpływ efektów II rzędu, ponieważ efekty pełzania są wówczas pomijane – współczynnik $K_\phi = 1$. Wyrażenie to stanowi przekształcenie zależności podanej bezpośrednio pod wzorem (5.37) w EC2 [1], przy założeniu $\beta = 0$; f_{ck} należy podstawiać w MPa. Problem z niedoszacowaniem efektów II rzędu zauważono również w [13]. Z kolei w [12] postuluje się nawet rewizję zależności opisującej K_ϕ , a w przypadku słupów poddanych długotrwałym obciążeniom zalecono uwzględnienie dodatkowego mimośrodu e_c zgodnie z modelem [14].

W obliczeniach wg normy chińskiej [3], przyrost momentu osiąga maksimum przy wartości $n = 0,5$. Takiego efektu nie obserwuje się w innych metodach, gdzie zależność $M_{Ed}(N_{Ed})$ jest monotonicznie rosnąca.

Wnioski

Różnice pomiędzy wynikami uzyskiwanymi z analizowanych metod są bardzo duże i tym większe, im większa jest smukłość, przy czym brak jest potwierdzenia ich poprawności w badaniach doświadczalnych lub rozwiązaniach dokładniejszych. Ogranicza to możliwość zastosowania tych metod do obliczeń smukłych słupów.



The use of simplified methods should be subject to limitations resulting from errors in the estimation of second-order effects. These errors can be quantified by comparing simplified methods with the general method. The restrictions should concern both the slenderness of the columns and the relative axial load.

The results obtained from all methods strongly depend on the relative axial load n , and the applicability of the methods to slender columns is determined primarily by this parameter.

In the M_{NS} , an increase in the axial load relative to M_{02} leads to a progressively faster growth of second-order bending moments M_{Ed} . This results directly from the mathematical formulation of the magnification factor, which depends on N_{Ed}/N_B and constitutes a significant limitation of this method when applied to slender columns.

The code-based methods (China, New Zealand, Hong Kong) are different implementations of the NCM or MMM. Based on the analyses carried out, only the Chinese code can, in practice, be applied to slender columns with a relative axial load higher than $n = 0.5$. However, it is uncertain whether this conclusion is universal, since M_{Ed} is not inversely proportional to the relative axial load n , but rather reaches a maximum at a certain load level and subsequently decreases as the axial load continues to increase.

Stosowanie metod uproszczonych powinno podlegać ograniczeniu ze względu na błędy oszacowania efektów II rzędu. Błędy te można wyznaczyć przez porównanie metod uproszczonych z metodą ogólną. Ograniczenia powinny dotyczyć smukłości słupów oraz względnej siły osiowej.

Wyniki obliczeń na podstawie wszystkich metod zależą w dużym stopniu od wartości względnej siły osiowej n i od tego parametru zależy też możliwość ich stosowania do smukłych słupów. W M_{NS} wzrost udziału siły osiowej względem M_{02} powoduje coraz szybszy przyrost momentów zginających II rzędu M_{Ed} , co wynika bezpośrednio z matematycznej konstrukcji współczynnika powiększenia zależnego od N_{Ed}/N_B i jest to istotne ograniczenie do stosowania tej metody w smukłych słupach.

Metody normowe (Chiny, Nowa Zelandia, Hongkong) są różnymi implementacjami metod MNK lub MMM, przy czym z przeprowadzonych analiz wynika, że tylko norma chińska może być w praktyce zastosowana do smukłych słupów o większym niż $n = 0,5$ udziale siły podłużnej. Nie ma jednak pewności, czy wniosek ten jest uniwersalny, co wynika z faktu, że M_{Ed} nie jest odwrotnie proporcjonalny do względnej siły osiowej n , ale osiąga on maksimum przy określonym poziomie obciążenia, po czym przy dalszym wzroście siły osiowej ulega zmniejszeniu.

Received: 05.05.2025

Revised: 08.07.2025

Published: 19.09.2025

Artykuł wpłynął do redakcji: 05.05.2025 r.

Otrzymano poprawiony po recenzjach: 08.07.2025 r.

Opublikowano: 19.09.2025 r.

Literature

- [1] PN-EN 1992-1-1:2008: Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków. Warszawa: Polski Komitet Normalizacyjny; 2008.
- [2] Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and commentary. Farmington Hills, MI: American Concrete Institute; 2019.
- [3] GB 50010: Code for Design of Concrete Structures. Beijing, China: Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China; 2010.
- [4] NZS 3101.1:2006 Concrete structures standard. Wellington, New Zealand: Standards New Zealand; 2006.
- [5] Code of Practice for Structural Use of Concrete 2013 (2020 Edition). Hong Kong: Buildings Department; 2020.
- [6] Kosiński K. Nośność i odkształcalność dwukierunkowo mimośrodowo ściskanych smukłych słupów żelbetowych z betonów wysokiej wytrzymałości. Rozprawa doktorska. Politechnika Krakowska, 2011.
- [7] Pędziwiatr J, Musiał M. Second-order effects in horizontally loaded reinforced concrete columns. *Studia Geotechnica et Mechanica* 2023; <https://doi.org/10.2478/sgem-2023-0022>.

- [8] Knauff M, Klempka K. Effective lengths of reinforced concrete columns in single-storey frame structures in the light of the eurocode. *Technical Sciences* 2009. <https://doi.org/10.2478/v10022-009-0007-6>.
- [9] Pędziwiatr J. Projektowanie słupów żelbetowych. 1st ed. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN; 2020.
- [10] PN-B-03264:2002 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. Warszawa: Polski Komitet Normalizacyjny, 2002.
- [11] Knauff M. Obliczanie konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2. 3rd ed. Wydawnictwo Naukowe PWN; 2018.
- [12] de Araújo JM. Comparative study of the simplified methods of Eurocode 2 for second order analysis of slender reinforced concrete columns. *Journal of Building Engineering* 2017; <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2017.10.003>.
- [13] Kosiński K, Winnicki A. Experimental research and analysis of load capacity and deformability of slender high strength concrete columns in biaxial bending. *Eng Struct* 2016; 107: 47–65. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.10.025>.
- [14] CEB-FIP Model Code 1990: Design Code. Lausanne, Switzerland: Comité Euro-International du Béton; 1991.