

mgr inż. Mariusz Myszor^{1)*}

ORCID: 0009-0005-3968-941X

mgr inż. Hubert Szabowicz¹⁾

ORCID: 0000-0002-7551-3770

dr hab. inż. Marek Kawa, prof. uczelni¹⁾

ORCID: 0000-0001-5033-9959

Estimating the ultimate limit state of masonry structures from component-level criteria

Określanie warunku zniszczenia muru na podstawie granicznych właściwości materiałów składowych

DOI: 10.15199/33.2025.09.15

Abstract. The article presents the application of Finite Element Limit Analysis (FELA) for assessing the strength of masonry structures. The limit state is determined using both upper and lower bound estimates. The analyses are restricted to a two-dimensional plane stress problem. The results are presented as limit surfaces corresponding to various orientations of the principal stress axes relative to the masonry material directions. The study shows that the proposed approach to the macroscopic formulation of a masonry strength criterion is computationally efficient compared to conventional Finite Element Method (FEM) simulations. Moreover, it can be effectively employed for defining failure criteria in other classes of composite materials.

Keywords: limit analysis; strength homogenization; masonry; composite; periodic cell.

Streszczenie. W artykule zaprezentowano wykorzystanie analizy granicznej z dyskretyzacją elementami skończonymi do wyznaczania wytrzymałości konstrukcji murowej. Stan graniczny określono w postaci oszacowań: górnego i dolnego. Analizy ograniczono do zadania 2D w płaskim stanie naprężenia. Wyniki zostały zaprezentowane w postaci powierzchni granicznych w przypadku różnych kątów odchylenia osi naprężeń głównych od kierunków materiałowych muru. Wykazano, że zaproponowane podejście do sformułowania makroskopowego kryterium wytrzymałości muru jest efektywne obliczeniowo w porównaniu z analizą metodą elementów skończonych (MES) i może być z powodzeniem stosowane do tego celu.

Słowa kluczowe: analiza graniczna; homogenizacja wytrzymałości; mur; kompozyt; komórka periodyczności.

The numerical analysis of masonry structures can be difficult due to the significant heterogeneity of the material. A wall made of bricks or blocks and mortar, which are components with different mechanical properties, can be classified as a composite. Because of computational limitations, the components of masonry cannot be directly represented in a numerical model, so it is necessary to use a technique that determines the effective properties of the material so it can be modelled as a homogeneous medium, such as in finite element analysis (FEA).

The effective properties of composites are typically determined using homogenisation techniques, which enable the transition from a micro-scale description of a heterogeneous medium to a macro-scale representation of a homogenised medium. In the case of masonry, this means moving from the scale of a wall segment, where bricks and mortar are distinguished, to the scale of the entire structure, where the material can be treated as homogeneous. The mechanical parameters are derived from a representative elementary volume (REV), which contains complete information about the constituents and their geometry. In the case of periodic composites – characterised by an ordered, repetitive structure – the REV corresponds to the periodic cell, i.e. the smallest repeating unit of the composite. Masonry, owing to the regular arrangement of bricks, is commonly classified within this category [1, 2].

Mury są problematyczne w analizie numerycznej. Wynika to z faktu silnej niejednorodności materiału. Mur składa się bowiem z cegieł lub bloczków oraz zaprawy, czyli składników o różnych właściwościach mechanicznych. Może być klasyfikowany jako kompozyt. Ze względu na ograniczenia obliczeniowe, składniki muru nie mogą być bezpośrednio odwzorowane w modelu numerycznym. Konieczna jest zatem technika, która pozwoli na określenie efektywnych właściwości materiału, aby w analizie numerycznej, np. metodą elementów skończonych (MES), mógł być on modelowany jako ośrodek jednorodny.

Oceny efektywnych właściwości kompozytów w przypadku ich zastosowania w praktyce można dokonać za pomocą technik homogenizacji. Pod tym pojęciem kryją się metody pozwalające na przejście od opisu materiału ze skali mikro, do skali makro. W przypadku muru oznacza to przejście od skali obserwacji fragmentu ściany, kiedy rozróżniamy cegły i zaprawę, do skali całego budynku, gdzie materiał muru modelujemy jako jednorodny. Parametry mechaniczne kompozytów określa się, analizując reprezentatywną elementarną objętość (REO), czyli taki fragment struktury, który zawiera pełną informację na temat właściwości i geometrii składników. Sposób, w jaki wyznacza się REO, różni się w zależności od rodzaju analizowanego kompozytu. W przypadku kompozytów periodycznych, charakteryzujących się uporządkowaną, powtarzalną strukturą, wyznaczenie REO jest proste. Odpowiada ono tzw. komórce periodyczności, czyli najmniejszemu powtarzalnemu

¹⁾ Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego;

^{*)} Correspondence address: mariusz.myszor@pwr.edu.pl



The numerical analysis of the ultimate load-bearing capacity of brick structures requires, particularly, the assumption of an appropriate macroscopic strength criterion, the determination of which has been the subject of numerous scientific studies [3÷5].

One of the methods for determining this criterion is the analysis of the strength of the periodicity cell (assuming an elastic-plastic model of the material components) using FEM [1, 6]. Such an approach offers the possibility of precise determination of the limit stress state in the cell, but it is associated with high computational costs, especially considering the necessity to analyse numerous load programmes to specify the criterion discretely. An additional challenge is the anisotropy of the criterion, depending on the angle between the main load directions and the material directions.

The paper presents an alternative approach to estimating the ultimate load-bearing capacity of masonry structures based on finite element limit analysis (FELA). This method is based on formulating the problem as a limit state in discrete terms and expressing it as a convex optimisation problem. This approach provides not only high accuracy of results in the form of mathematically rigorous estimates, but also significantly reduces the calculation time compared to FEM. This work aims to assess the applicability of this method for determining the anisotropic limit state of a brick wall considered as a periodic composite.

FELA method

To evaluate the macroscopic strength criterion, the FELA method has been used. Although employing finite elements for the discretisation of the task geometry, it is based on mathematically rigorous theorems concerning the upper (UB) or lower (LB) bound estimation of the limit state in any boundary problem. According to this approach, the limit state corresponds to a situation during which, for a given load programme, it is impossible to increase the load any further, since it will produce a failure mechanism and unlimited plastic flow.

The limit state can be estimated from both below and above. The lower bound (LB) approach involves searching for the critical load for which a statically admissible stress field exists. This is a field that satisfies equilibrium, continuity, and stress boundary conditions. Moreover, at every point in the field, the local strength criterion must also be fulfilled. The load value obtained under these assumptions is lower than the actual critical value, which means that LB provides a safe (conservative) estimate. Among such estimates, the most relevant is the one that represents the limit condition as accurately as possible, namely the maximum admissible load value. To determine this, it is necessary to optimise the stress distribution [7]. Conversely, the upper bound (UB) approach is based on the principle of virtual work, whereby the limit load corresponds to an assumed failure mechanism (a kinematically admissible displacement velocity field). Such a mechanism must satisfy the displacement boundary conditions and also remain kinematically compatible; that is, individual blocks may not overlap but may only slide relative to one another (in accordance with the associated plastic flow rule). Furthermore, if the blocks deform, any induced stresses must satisfy the plasticity

fragmentowi kompozytu. Mur, ze względu na regularny układ cegieł, zaliczany jest do tej grupy [1, 2]. W analizie numerycznej stanu granicznego nośności obiektów w technologii muru ceglanego, konieczne jest przede wszystkim przyjęcie odpowiedniego makroskopowego kryterium wytrzymałości materiału. Wyznaczenie takiego kryterium w przypadku muru jest złożonym zagadnieniem i stanowi przedmiot wielu badań naukowych [3÷5].

Jedną z metod określania makroskopowego kryterium wytrzymałości jest analiza wytrzymałości komórki periodyczności (przy założeniu sprężysto-plastycznego modelu materiału składników) z wykorzystaniem MES [1, 6]. Podejście to pozwala na precyzyjne wyznaczenie granicznego stanu naprężenia w komórce, ale wiąże się z wysokim kosztem obliczeniowym, szczególnie wobec konieczności analizowania wielu programów obciążenia w celu dyskretnego określenia kryterium. Dodatkowym wyzwaniem jest anizotropia kryterium, tj. zależność jego kształtu od kąta pomiędzy głównymi kierunkami obciążenia a kierunkami materiałowymi. W artykule przedstawiono alternatywne podejście do szacowania wytrzymałości konstrukcji murowej na podstawie analizy granicznej z dyskretyzacją elementami skończonymi (ang. Finite Element Limit Analysis – FELA). Metoda FELA polega na sformułowaniu zagadnienia jako stanu granicznego w ujęciu dyskretnym oraz zapisaniu go w postaci problemu optymalizacji wypukłej. Takie podejście umożliwia nie tylko uzyskanie dużej dokładności wyników w postaci rygorystycznych, z matematycznego punktu widzenia, oszacowań warunku stanu granicznego, ale również pozwala na znaczne skrócenie czasu obliczeń w porównaniu z tradycyjnymi metodami MES. Celem pracy była ocena przydatności metody FELA do określenia anizotropowego warunku granicznego muru ceglanego rozumianego jako kompozyt periodyczny.

Metoda FELA

Do oceny makroskopowego kryterium wytrzymałości wykorzystano metodę FELA, która, choć do dyskretyzacji geometrii zadania wykorzystuje elementy skończone, to w swej istocie bazuje na ścisłych matematycznie twierdzeniach o szacowaniu górnym (OG) lub dolnym (OD) stanu granicznego w dowolnym zagadnieniu brzegowym. W tym ujęciu stan graniczny odpowiada sytuacji, w której przy pewnym założonym programie obciążenia niemożliwe jest jego dalsze zwiększanie. Doprowadzi to do powstania mechanizmu zniszczenia i nieograniczonego płynięcia plastycznego.

Stan graniczny można oszacować z góry i z dołu. OD polega na znalezieniu obciążenia krytycznego, w przypadku którego istnieje statycznie dopuszczalne pole naprężenia w murze. Musi ono spełniać warunki równowagi, warunki ciągłości wektora naprężenia na granicy tych stref oraz naprężeniowe warunki brzegowe. Ponadto w każdym punkcie pola musi być spełniony lokalny warunek wytrzymałości. Znalaziona przy takich założeniach wartość obciążenia jest mniejsza niż rzeczywista wartość krytyczna, co oznacza, że OD można nazywać oszacowaniem bezpiecznym (konserwatywnym). Oczywiście spośród wartości bezpiecznych interesuje nas taka, która szacuje

condition. The load value obtained under these assumptions is always higher than the critical value, and the mechanism is optimised to provide the most accurate estimate, i.e. the minimum load value. A graphical representation of the lower- and upper-bound approximations of the limit state is shown in Figure 1.

The FELA method defines the limit state as a discrete problem. The domain is divided into finite elements, viewed as zones of continuous stresses or blocks of the mechanism. The optimisation variables are stresses or displacement velocities, respectively. The conditions of equilibrium, continuity, and compatibility are introduced as constraints, enabling both tasks to be formulated as a convex optimisation problem. This approach significantly reduces the calculation time compared to classical elastic-plastic FEM analyses, which is related to model simplification, such as omitting the implementation of constitutive laws (a rigid-perfectly plastic material model is assumed).

The ultimate limit state of the wall has been determined by assuming a plane stress state, complete periodicity of the structure (no local imperfections or material variations), periodic boundary conditions, and a perfectly rigid-plastic material model with an associated plastic flow rule. The brittle behaviour of the components has been modelled by applying the Mohr-Coulomb (MC) criterion. The method for selecting the periodicity cell, along with its detailed geometry, is illustrated in Figure 2. The strength parameters, expressed as the internal friction angle (ϕ) and cohesion (c), have been adopted based on studies [1, 5]. The values are shown in Table.

The analysis has been carried out using the approaches proposed by Lyamin and Sloan [8] (LB) and Makrodimopoulos and Martin [9] (UB). The LB solution employed linear stress field shape functions, while the UB solution utilised quadratic displacement velocity field shape functions.

Both problems can be expressed as convex optimisation problems. In optimisation theory, there exists the concept of a dual formulation, which involves presenting a given problem in an alternative form – usually by converting a maximisation problem into a minimisation (or vice versa). This often provides a different perspective on the problem. In many cases, the solutions to the primal and dual problems are identical (strong duality) or only approximate (weak duality). Importantly, one of these formulations may be much easier to solve than the other.

To the problems of LB and UB, it is possible to formu-

warunek graniczny możliwie dokładnie, tj. maksymalna wartość obciążenia. Do jej określenia konieczna jest odpowiednia optymalizacja rozkładu naprężenia [7]. OG polega na określeniu obciążenia granicznego odpowiadającego przyjętemu mechanizmowi zniszczenia (kinematycznie dopuszczalnemu polu prędkości przemieszczeń), metodą prac wirtualnych. Mechanizm taki musi spełniać przemieszczeniowe warunki brzegowe i być kompatybilny, tj. poszczególne bloki nie mogą na siebie nachodzić, a jedynie przesuwają się po sobie wzajemnie (z uwzględnieniem stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia). Ponadto, jeśli bloki się odkształcają, wyindukowane naprężenia muszą spełniać warunek plastyczności. Znalaziona wartość obciążenia jest w takiej sytuacji zawsze większa niż wartość krytyczna, przy czym mechanizm optymalizuje się w celu określenia dokładnego oszacowania, tj. minimalnej wartości obciążenia. Graficzną reprezentację oszacowania stanu granicznego przedstawiono na rysunku 1.

W metodzie FELA stan graniczny rozważa się jako problem dyskretny. Dzieląc domenę zadania na elementy skończone i traktując elementy odpowiednio jako strefy ciągłych naprężeń lub bloki mechanizmu, poszukiwane wartości (naprężenia lub prędkości przemieszczeń) jako zmienne optymalizacyjne, a dodatkowe warunki (równowagi i ciągłości wektora albo kompatybilności) jako ograniczenia, oba oszacowania można sformułować jako problemy optymalizacji wypukłej. Takie podejście znacznie skraca czas obliczeń w porównaniu z klasycznymi analizami sprężysto-plastycznymi MES, co wiąże się z przyjęciem kilku założeń, które znacznie upraszczają model, np.

pomijana jest implementacja praw konstytutywnych (przyjmuje się sztywno-idealnie plastyczny model materiału).

Wyznaczenie stanu granicznego wytrzymałości muru przeprowadzono w 2D, zakładając płaski stan naprężenia, pełną periodyczność (brak lokalnych imperfekcji lub zmian materiałowych) oraz sztywno-idealnie plastyczny model materiału ze stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia. Kruchy charakter materiału uwzględniono, zakładając kryterium Coulomba-Mohra (C-M). Sposób wyboru komórki periodyczności wraz ze szczegółową geometrią pokazano na rysunku 2. Parametry wytrzymałościowe w postaci kąta tarcia wewnętrznego ϕ oraz kohezji c przyjęto na podstawie prac [1, 5], o wartościach przedstawionych w tabeli.

Analizę przeprowadzono, wykorzystując podejścia zaproponowane przez Lyamina

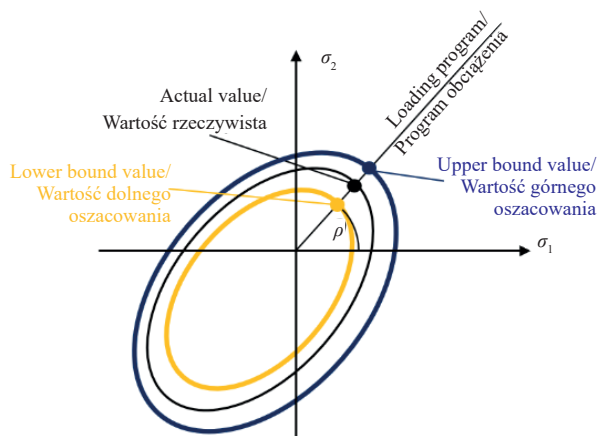


Fig. 1. Graphical representation of lower and upper limit surface estimation

Rys. 1. Graficzna reprezentacja dolnego i górnego oszacowania powierzchni granicznej

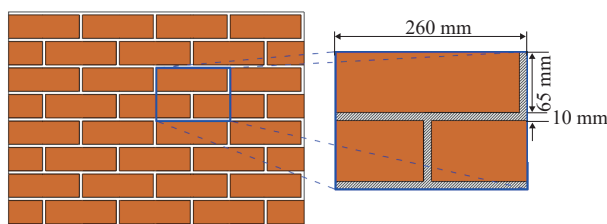


Fig. 2. Selection and dimensions of periodic cell

Rys. 2. Dobór komórki i wymiary periodyczności



late strongly dual problems that are identical in their solutions [10]. The dual problem to LB corresponds to searching for a failure mechanism subject to slightly different conditions from those imposed in UB, while the dual problem to UB corresponds to searching for an admissible stress distribution (satisfying different constraints from those associated with LB). This study describes both problems in static form, i.e. as maximisation problems, because UB is easier to solve specifically in this particular representation [11]. As a result, both problems can be written as Equation (1) [12, 13]:

Maximize
 α
Subject to:

$$B^T \sigma = \alpha p + p_0$$

$$f(\sigma^e)_k \leq 0 \quad \forall e = 1, 2, \dots, n_e \quad (1)$$

where

α – the desired load value multiplier,
 σ^e – the stress vector at the corners of all elements of the analysed area (different for LB and UB),
 matrix B contains the coefficients of static equilibrium equations, stress continuity and boundary conditions, which differ significantly for LB and UB limit analysis. The vectors p and p_0 contain the optimised and constant load, respectively. The condition $f(\sigma^e)_k$ represents the local limit state condition, in this case assumed as the C-M criterion for the given parameters, written in the form of a second-order cone constraint [10].

The formulation (1) is general and suitable for solving various standard boundary problems [13], but in the case of periodic composites (e.g. a wall), it is necessary to specify it in more detail. For this purpose, periodicity boundary conditions were adopted, i.e. specific boundary conditions assuming equality between stresses on opposite edges of the cell, and integral constraints were postulated expressing the compatibility between stress integrals within the periodicity cell (micro-level stresses) and their macroscopic counterparts. This condition is expressed in equation (2).

$$\sigma_{ij} = \int_A \sigma^e_{ij} dA \quad (2)$$

Both of these conditions were taken into account by modifying matrix B (the number of variables was increased by global stresses, i.e. three individual values for the entire cell).

Additionally, to take into account the anisotropy of the criterion, expected due to the privileged directions present in the structure, the components of the stress tensor were expressed by principal stress values and the angle of deviation of their orientations from the material direction β defined in Figure 3.

Finally, within the LB, the maximum value of one of the two principal stresses was investigated under the assumed load programme defined by the angle ρ , which determines their mutual relationship (see Figure 1) at a given anisotropy angle β . Similarly, in the case of the UB, the minimum value of one of

Strength parameters of masonry components
Parametry wytrzymałości składników muru

Material /Material	c [MPa]	ϕ [°]
Brick/Cegła	4.35	30
Mortar/Zaprawa	0.35	40

i Sloana [8] do wyznaczenia OD oraz Makrodimitopoulou i Martina [9] do OG. W rozwiązaniu OD zastosowano liniowe funkcje kształtu pola naprężenia, natomiast w OG – kwadratowe funkcje kształtu pola prędkości przemieszczeń.

Metoda FELA formuluje oba rozwiązania jako problemy optymalizacji wypukłej. W teorii optymalizacji istnieje pojęcie sformułowania dualnego, które polega na przedstawieniu danego problemu w alternatywnej formie – zazwyczaj przez zamianę problemu maksymalizacji na problem minimalizacji (lub odwrotnie). Często pozwala to spojrzeć na zagadnienie „z drugiej strony”. W wielu przypadkach rozwiązania problemu prymalnego i dualnego są identyczne (silna dualność) lub tylko zbliżone (słaba dualność). Jedno z tych sformułowań może być znacznie łatwiejsze do rozwiązania niż drugie.

W przypadku zagadnień OD i OG można sformułować silnie dualne problemy, które mają identyczne rozwiązania [10]. Problem dualny do OD polega na poszukiwaniu mechanizmu zniszczenia (spełniającego nieco inne warunki niż wynikający z OG), natomiast problem dualny do OG polega na poszukiwaniu dopuszczalnego rozkładu naprężeń (spełniającego inne ograniczenia niż ten stowarzyszony z OD). W artykule oba zagadnienia przedstawiono w postaci statycznej, tj. w postaci zagadnienia maksymalizacyjnego, ponieważ OG jest łatwiejsze do rozwiązania w tej postaci [11] i w rezultacie można je zapisać jako [12, 13]:

Maksymalizuj
 α
przy założeniu:

$$B^T \sigma = \alpha p + p_0$$

$$f(\sigma^e)_k \leq 0 \quad \forall e = 1, 2, \dots, n_e \quad (1)$$

gdzie:

α – poszukiwany mnożnik wartości obciążenia;
 σ^e – wektor naprężeń w narożach wszystkich elementów analizowanego obszaru (różny w analizie OD i OG), a macierz B zawiera współczynniki równań równowagi statycznej, ciągłości naprężeń oraz warunki brzegowe, które różnią się znacznie w analizie granicznej OD i OG. Wektory p i p_0 zawierają zoptymalizowane i stałe obciążenie. Warunek $f(\sigma^e)_k$ to lokalny warunek stanu granicznego, w tym przypadku założony jako warunek C-M przy danych parametrach, zapisany w postaci stożkowego ograniczenia kwadratowego [10].

Wzór (1) jest ogólny i nadaje się do rozwiązywania różnych typowych zagadnień brzegowych [13], ale w przypadku kompozytów periodycznych, tj. np. muru, konieczne jest jego uszczegółowienie. W tym celu przyjęto warunki brzegowe periodyczności, tj. specyficzne warunki brzegowe zakładające równość pomiędzy naprężeniami na przeciwległych brzegach komórki oraz postulowano ograniczenia całkowite wyrażające zgodność pomiędzy całkami z naprężeń w obrębie komórki periodyczności (naprężeniami na poziomie mikro) a ich makroskopowymi odpowiednikami.

$$\sigma_{ij} = \int_A \sigma^e_{ij} dA \quad (2)$$

the principal stresses was being searched for. These solutions were investigated using a self-written script in MATLAB, utilising commercial software MOSEK.

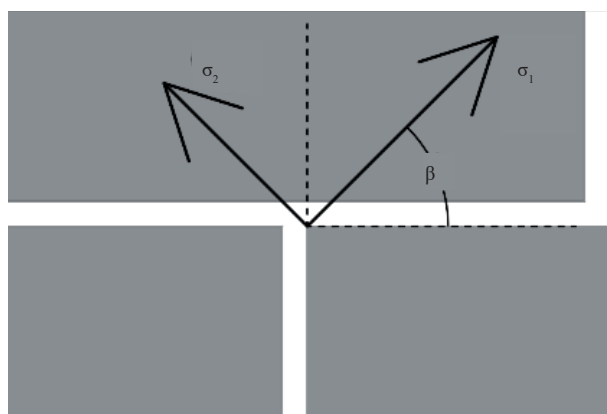


Fig. 3. Orientation of principal stresses

Rys. 3. Orientacja naprężeń głównych

Results

The study aimed to determine the LB and UB of the macroscopic limit state surface of the wall. These surfaces were determined discretely for 360 load programmes defined by the angle value ρ ($\rho \in [1^\circ, 360^\circ]$, $\Delta\rho = 1^\circ$) and four principal stress orientations relative to the material directions ($\beta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$). The LB and UB limit surfaces are shown in Figure 4. The results obtained within the LB are marked in orange, while those obtained within the UB are marked in blue. In simple cases of load programmes, the results were in accordance with analytical solutions. The strength of the wall in uniaxial compression or tension in the vertical direction (perpendicular to the continuous joint) corresponds to the strength of the mortar. It was also observed that, at $\beta = 0^\circ$, the strength of the wall in uniaxial compression/tension in the vertical direction is approximately twice as low as in the horizontal direction.

The limit surfaces confirm anisotropy – their shape changes with the orientation of the principal stresses. As the angle β increases, the permissible area decreases, which means that the highest strength occurs when the principal directions of the stresses and the material directions are aligned.

A difference in estimates resulting from the model discretisation method is noticeable between LB and UB solutions for many load programmes. The actual limit surface lies between them. The difference in estimates can be effectively reduced by using adaptive mesh refinement algorithms [12], which the authors intend to explore in future research. Until such improvements are made, a conservative (safe) LB should be adopted for the analysis of masonry structures.

The calculation time for individual tasks is relatively small, which is the main advantage of the applied method. In the case of meshes consisting of approximately 2,200 finite elements, the analysis of a one load programme, performed on a single 4.5 GHz processor core, takes approximately 2 sec-

Oba typy warunków uwzględniono przez modyfikację macierzy B (liczbę zmiennych zwiększono o naprężenia globalne, tj. trzy pojedyncze wartości dla całej komórki). Dodatkowo, aby uwzględnić anizotropię kryterium spodziewaną ze względu na występujące kierunki uporządkowania w strukturze, składowe wartości tensora naprężenia wyrażono przez wartości główne oraz kąt odchylania ich kierunków od kierunku materiałowego β zdefiniowany na rysunku 3.

Ostatecznie w ramach OD poszukiwano maksymalnej wartości jednego z dwóch naprężeń głównych przy założonym programie obciążenia, zdefiniowanym przez kąt ρ określający ich wzajemną relację (rysunek 1) przy zadanym kącie anizotropii. Analogicznie, w przypadku OG poszukiwano minimalnej wartości jednego z naprężeń głównych. Rozwiązań tych poszukiwano za pomocą własnego skryptu zapisanego w programie MATLAB, wykorzystując komercyjne oprogramowanie MOSEK.

Wyniki

Celem badań było określenie makroskopowej powierzchni granicznej muru. Powierzchnie te określano w sposób dyskretny, rozwiązując 360 programów obciążenia zdefiniowanych wartością kąta ρ ($\rho \in [1^\circ, 360^\circ]$, $\Delta\rho = 1^\circ$). W celu uwzględnienia anizotropii rozpatrzono cztery różne orientacje naprężeń głównych względem kierunków materiałowych. Kąty β wynosiły odpowiednio $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$. Powierzchnie graniczne dolnego oraz górnego oszacowania zaprezentowano na rysunku 4. Kolorem pomarańczowym oznaczono wyniki uzyskane w ramach OD, kolorem niebieskim – OG. W przypadku prostych programów obciążenia rozwiązania określono również analitycznie. Analiza wykazała zgodność uzyskanych wyników z tymi wartościami, tj. np. wytrzymałość muru na jednoosiowe ściskanie lub rozciąganie w kierunku pionowym (prostopadłym do ciągłej spoiny) odpowiada wytrzymałości zaprawy. Zaobserwowano również, że w przypadku kąta $\beta = 0^\circ$ wytrzymałość muru przy jednoosiowym ściskaniu/rozciąganiu w kierunku pionowym jest prawie dwukrotnie mniejsza niż w kierunku poziomym.

Na przedstawionych powierzchniach stanu granicznego zauważalna jest wcześniej wspomniana anizotropia – kształt powierzchni różni się w zależności od orientacji naprężeń głównych. Co ciekawe, wraz ze wzrostem kąta β maleje przestrzeń ograniczona warunkiem dla obu oszacowań. Oznacza to w praktyce, że największa wytrzymałość konstrukcji murowej jest uzyskiwana w przypadku orientacji naprężeń głównych, zgodnej z kierunkami materiałowymi. Pomiędzy rozwiązaniami OD i OG, w wielu programach obciążenia, zauważalna jest różnica w oszacowaniach wynikająca ze sposobu dyskretyzacji modelu. Rzeczywista powierzchnia graniczna znajduje się pomiędzy powierzchnią OD a powierzchnią OG. Różnicę w oszacowaniach można efektywnie zmniejszyć przez zastosowanie algorytmów adaptacyjnego zagęszczania siatki [12], co planujemy uwzględnić w przyszłych badaniach. Do czasu ulepszenia oszacowania, chcąc wykorzystać kryterium do analizy konstrukcji murowych, należy korzystać z konserwatywnej wartości OD.

Czas obliczeń pojedynczych zadań jest stosunkowo krótki, co jest główną zaletą zastosowanej metody, w przypadku siatek



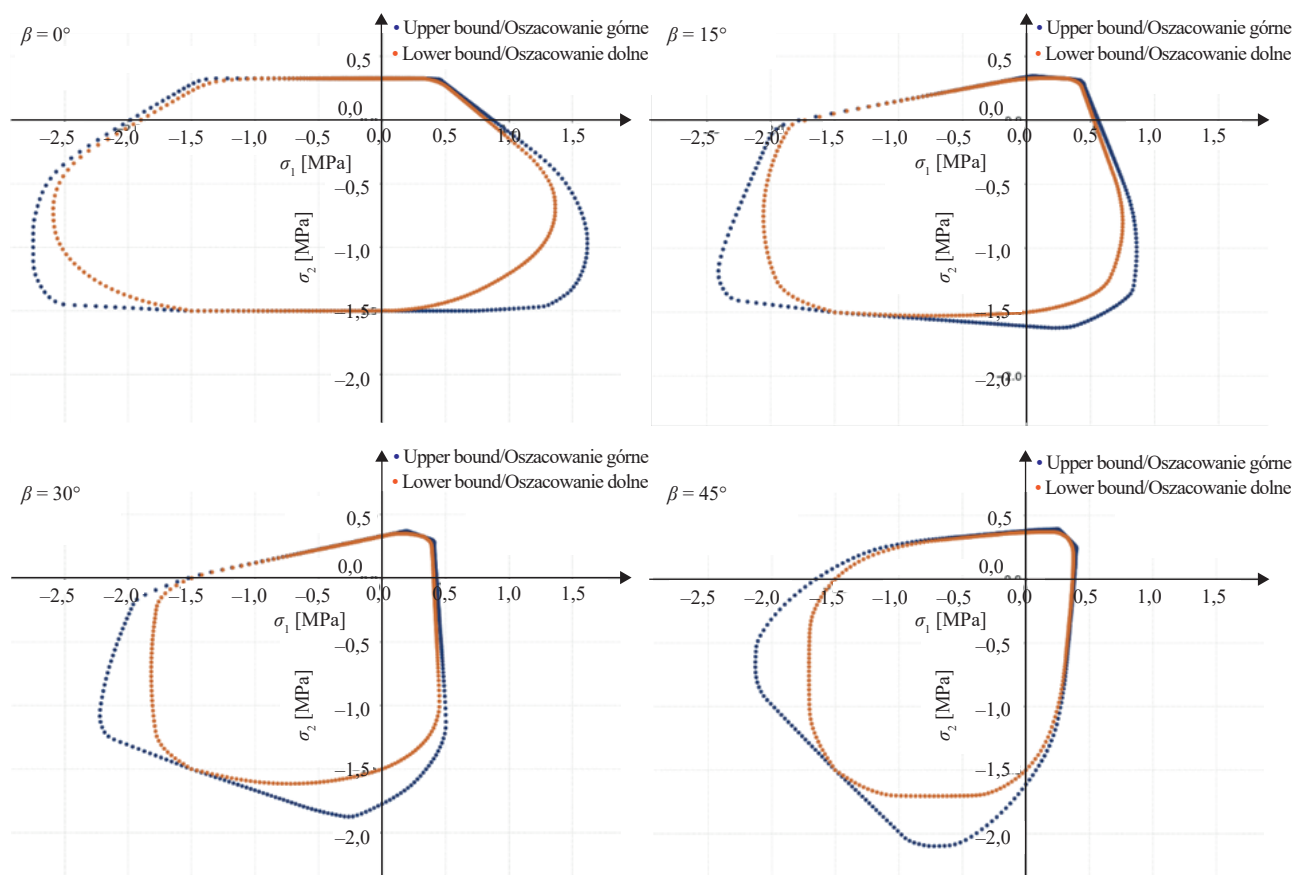


Fig. 4. Upper and lower estimations of limit state surface

Rys. 4. Powierzchnie stanu granicznego dolnego i górnego oszacowania

onds (720 seconds for the entire surface). This time can be significantly reduced by using parallel computation. In the case of typical walls, the efficiency of the FELA method can be further increased by using specific cells with shifted periodicity, as shown in [5]. The FELA method, used to determine the limit state of composite material strength, is characterised by very high computational efficiency compared to the classical FEM. Thus, while its application on a single occasion to obtain a limit surface may offer limited benefits, these benefits increase with repeated use (e.g. to assess the strength criteria of wall fragments with a specific, different periodicity cell geometry). This method can also be applied to other types of composites, such as random or random-layered composites (walls with a random arrangement of stones).

Summary

The article proposes an effective method for determining the limit condition using the example of a masonry structure. Finite element limit analysis (FELA) was used in both LB and UB forms

The results of the conducted analyses allowed the authors to formulate the following conclusions:

- the FELA method is computationally efficient for determining the limit state and can be successfully used for strength analysis of composite materials;

składających się z ok. 2200 elementów skończonych, analiza pojedynczego kierunku obciążenia, wykonywana na jednym rdzeniu procesora o taktowaniu 4,5 GHz, trwa ok. 2 s (720 s całej powierzchni). Czas ten można istotnie skrócić przez zastosowanie obliczeń równoległych. W przypadku typowych murów efektywność metody FELA można dodatkowo zwiększyć, stosując specyficzne komórki periodyczności z przesunięciem periodyczności, jak pokazano w pracy [5]. Metoda FELA, stosowana do wyznaczania stanu granicznego wytrzymałości materiału kompozytowego, cechuje się bardzo dużą wydajnością obliczeniową w porównaniu z klasyczną metodą elementów skończonych. Tym samym, o ile zastosowanie jej jednorazowo do uzyskania powierzchni granicznej może dawać ograniczone korzyści, to zwiększają się one przy jej wielokrotnym zastosowaniu (np. do oceny kryteriów wytrzymałości fragmentów muru o specyficznej innej geometrii komórki periodyczności). Metodę tę można również stosować do innych typów kompozytów, takich jak losowe lub losowo-warstwowe (mury o losowym układzie kamieni).

Wnioski

W artykule zaproponowano efektywną metodę określenia warunku granicznego na przykładzie konstrukcji muryowej. Wykorzystano **analizę graniczną dyskretyzowaną elementami skończonymi (FELA)**, zarówno w postaci OD, jak i OG.

- the greatest strength of a masonry structure is achieved when the directions of the principal stress axes are consistent with the material direction;
- there is a difference between LB and UB solutions in certain load programmes. This is a result of model discretisation. Future research plans to use adaptive mesh refinement algorithms to reduce the error between solutions;
- the actual limit state surface is located between the LB and UB surfaces. The safe approach is to assume the strength value based on LB;
- the FELA method can be used to determine the limit state of either periodic or other types of composites, e.g. random or random-layered;
- the development of an algorithm allowing for the direct application of the method in practical problems is under study.

Wyniki przeprowadzonych analiz pozwoliły sformułować następujące wnioski:

- metoda FELA jest efektywną obliczeniową metodą wyznaczania stanu granicznego i z powodzeniem może być stosowana do analizy wytrzymałościowej materiałów kompozytowych;
- największa wytrzymałość konstrukcji murowej jest uzyskiwana, gdy kierunki osi naprężeń głównych są zgodne z kierunkami materiałowymi;
- pomiędzy rozwiązaniami OD i OG występuje różnica w pewnych programach obciążenia. Jest ona wynikiem dyskretyzacji modelu. W przyszłych badaniach planuje się wykorzystanie adaptacyjnych algorytmów zagęszczania siatki w celu zmniejszenia błędów pomiędzy rozwiązaniami;
- rzeczywista powierzchnia graniczna znajduje się pomiędzy powierzchnią OD a powierzchnią OG. Podejściem konserwatywnym (bezpiecznym) jest jednak przyjmowanie wartości wytrzymałości na podstawie OD;
- metoda FELA może być wykorzystana do wyznaczania stanu granicznego zarówno kompozytów periodycznych, jak i innych typów kompozytów, np. losowych lub losowo-warstwowych;
- planuje się opracowanie algorytmu pozwalającego na bezpośrednie wykorzystanie metody w praktycznych zadaniach.

Received: 12.05.2025
Revised: 07.07.2025
Published: 19.09.2025

Artykuł wpłynął do redakcji: 12.05.2025 r.
Otrzymał poprawiony po recenzjach: 07.07.2025 r.
Opublikowano: 19.09.2025 r.

Literature

- [1] Shieh-Beygi B, Pietruszczak S. Numerical analysis of structural masonry: mesoscale approach. *Computers & Structures*. 2008;86 (21–22): 1958–1973. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2008.05.007>
- [2] Ma G, Hao H, Lu Y. Homogenization of masonry using numerical simulations. *Journal of Engineering Mechanics*. 2001;127 (5): 421–431; [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\) 0733-9399 \(2001\)127:5 \(421\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE) 0733-9399 (2001)127:5 (421))
- [3] Andreus U. Failure criteria for masonry panels under in-plane loading. *Journal of Structural Engineering*. 1996;122 (1): 37–46; [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\) 0733-9445 \(1996\)122:1 \(37\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE) 0733-9445 (1996)122:1 (37))
- [4] Symkezis CA, Asteris PG. Masonry failure criterion under biaxial stress state. *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2001;13 (1): 58–64; [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\) 0899-1561 \(2001\)13:1 \(58\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE) 0899-1561 (2001)13:1 (58))
- [5] Kawa M. Failure criterion for brick masonry: A micro-mechanics approach. *Studia Geotechnica et Mechanica*. 2014;36 (3): 37–48; <https://doi.org/10.2478/sgem-2014-0025>
- [6] Anthoine A. Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures*. 1995;32 (2): 137–163; [https://doi.org/10.1016/0020-7683 \(94\)00140-R](https://doi.org/10.1016/0020-7683 (94)00140-R)
- [7] Verruijt A. *Soil Mechanics*. 2001.
- [8] Lyamin AV, Sloan SW. Lower bound limit analysis using non-linear programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002;55 (5): 573–611. <https://doi.org/10.1002/nme.511>
- [9] Makrodimopoulos A, Martin CM. Upper bound limit analysis using discontinuous quadratic displacement fields. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2008;24 (11): 911–927. <https://doi.org/10.1002/cnm.998>
- [10] Ciria Suárez H. Computation of upper and lower bounds in limit analysis using second-order cone programming and mesh adaptivity [doctoral dissertation]. Cambridge (MA): Massachusetts Institute of Technology; 2004.
- [11] Krabbenhoft K, Lyamin AV, Hjiaj M, Sloan SW. A new discontinuous upper bound limit analysis formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005;63 (7): 1069–1088. <https://doi.org/10.1002/nme.1314>
- [12] Szabowicz H, Kawa M, Puła W. Efficient and conservative estimation reliability analysis of strip footing on spatially variable $c-\phi$ soil using random finite element limit analysis. *Studia Geotechnica et Mechanica*. 2025;1:19. <https://doi.org/10.2478/sgem-2025-0002>
- [13] Krabbenhoft K, Lyamin AV, Sloan SW. Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs. *International Journal of Solids and Structures*. 2007;44 (5): 1533–1549. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.06.036>

