

dr hab. inż. Włodzimierz Brzkała

ORCID 0000-0001-5535-9414

dr hab. inż. Aneta Herbut¹⁾*

ORCID 0000-0001-7106-9652

Bearing capacity of embedded strip footings

Nośność ław fundamentowych zagłębionych w podłożu

DOI: 10.15199/33.2025.09.02

Abstract: For shallow foundations, Eurocode EC7-1 ignores the strength of the soil above the founding level thus causes an underestimation of the bearing capacity of the subsoil. Numerical FEM-simulations were performed, both for constant ($D_{\max} = D_{\min} = D$) and for varied foundation depths on both sides of the strip foundation ($D_{\max} > D_{\min}$). It was found that the dominant role is played by the width of the foundation B (especially for $B = 0.5 \div 1.0$ m and for the depth $D/B > 3$) as well as adhesion on the embedded foundation walls. The estimated implicit reserves in bearing capacity can be as great as 30÷70% for a non-cohesive soil and even still greater for a cohesive soil. The situation is not so evident if the value $(D_{\max} - D_{\min})/B$ equals 3÷4 or more.

Keywords: subsoil; elasto-plasticity; FEM; strip foundation.

Streszczenie: W przypadku fundamentów bezpośrednich Eurokod EC7-1 pomija wytrzymałość gruntu powyżej poziomu posadowienia, co prowadzi do niedoszacowania nośności podłoża. Dokonano symulacji numerycznych MES, zarówno przy stałej ($D_{\max} = D_{\min} = D$), jak i zróżnicowanej głębokości posadowienia po obu stronach ławy ($D_{\max} > D_{\min}$). Stwierdzono, że dominującą rolę odgrywa szerokość ławy B (szczególnie, gdy $B = 0,5 \div 1,0$ m i zagłębienie $D/B > 3$) oraz adhezja na zagłębionych ścianach fundamentowych. Oszacowane niejawne zapasy nośności mogą wynosić nawet 30÷70% w przypadku gruntu niespoistego i jeszcze więcej w przypadku gruntu spoistego. Sytuacja jest mniej oczywista przy wartości $(D_{\max} - D_{\min})/B$ równej 3÷4 i większej.

Słowa kluczowe: podłoże gruntowe; sprężysto-plastyczność; MES; ława fundamentowa.

The assessment of the geotechnical bearing capacity R of a strip footing $B \times L$ (2D case, $L \gg B$) consists in determining the ultimate limit state (ULS) of the subsoil, as recommended by Eurocode EC7-1. This involves verifying the ULS condition expressed as $V_d < R_d = R_k / \gamma_R = R_k / 1.4$. In the case of a symmetrical calculation scheme (Figure 1a), for the simplest case of a central vertical load V [kN/m], the classical Prandtl–Terzaghi formula applies:

$$R_k = B \cdot (c \cdot N_c + q \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma) \quad (1a)$$

$$q = D \cdot \gamma$$

The dimensionless bearing capacity factors take the standard form [1]:

$$N_q = \exp \{ \pi \cdot \tan \{ \phi \} \} \cdot \tan^2 \{ 45^\circ + \phi/2 \}$$

$$N_\gamma = 2 \cdot (N_q - 1) \cdot \tan \{ \phi \}$$

$$N_c = (N_q - 1) \cdot \cot \{ \phi \}$$

Here R_k [kN/m] denotes the characteristic (vertical) bearing capacity of a homogeneous and isotropic subsoil. In the following analysis, the soil is considered either free of groundwater or fully drained.

The surcharge q is commonly assumed as a constant value, i.e. a uniform vertical load applied at foundation level, $q = D \cdot \gamma = \text{const}$, where γ [kN/m³] is the unit weight of the soil adjacent to the foundation (Figure 1a), down to the foundation depth D . In the case of non-uniform surcharge values q_L and

ocena geotechnicznej nośności R ławy fundamentowej $B \times L$ (przypadek 2D, $L \gg B$) polega na określeniu stanu granicznego podłoża, który jest zalecany przez Eurokod EC7-1. Wiąże się z tym sprawdzenie warunku ULS mającego postać $V_d < R_d = R_k / \gamma_R = R_k / 1.4$. W przypadku standardowej sytuacji obliczeniowej (rysunek 1a) w najprostszym przypadku centralnego obciążenia pionowego V [kN/m], ma zastosowanie następujący wzór Prandtla–Terzaghiego:

$$R_k = B \cdot (c \cdot N_c + q \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma) \quad (1a)$$

$$q = D \cdot \gamma$$

Bezwymiarowe współczynniki nośności mają wówczas standardową postać [1]:

$$N_q = \exp \{ \pi \cdot \tan \{ \phi \} \} \cdot \tan^2 \{ 45^\circ + \phi/2 \}$$

$$N_\gamma = 2 \cdot (N_q - 1) \cdot \tan \{ \phi \}$$

$$N_c = (N_q - 1) \cdot \cot \{ \phi \}$$

natomiast R_k [kN/m] oznacza wartość charakterystyczną nośności (składowa pionowa) podłoża jednorodnego i izotropowego; w dalszej części rozpatruje się podłoże bez zwierciadła wody gruntowej lub w pełni zdrenowane.

Obciążenie q jest powszechnie przyjmowane jako wartość stała, tj. pionowe obciążenie wiotkie w poziomie posadowienia: $q = D \cdot \gamma = \text{const}$, gdzie γ [kN/m³] jest ciężarem objętościowym gruntu obok fundamentu (rysunek 1a) do głębokości posadowienia D . W przypadku zróżnicowanego obciążenia q_L oraz q_P po lewej i po prawej stronie ławy wybiera się wartość mniejszą, tj. $q = \min \{ q_L, q_P \}$, czyli $q = q_P = D_{\min} \cdot \gamma$ w sytuacji na rysunku 1b. Na korzystną sytuację zróżnicowanych obciążeń (wiotkich) po lewej i po pra-

¹⁾ Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego,

²⁾ Correspondence address: aneta.herbut@pwr.edu.pl



q_p on the left and right side of the footing, the smaller value is adopted, i.e. $q = \min\{q_L, q_p\}$, so $q = q_p = D_{\min} \cdot \gamma$ as illustrated in Figure 1b. The beneficial effect of such non-uniform surcharges was highlighted by Rybak and Konderla [2], who estimated an increase in footing bearing capacity by several tens of percent for $D_{\min} \sim (0.5 \div 1.0) \cdot B$ with $D_{\max} \sim 1.5 \cdot B$, and even greater improvements for smaller ratios $D_{\min}/B$ combined with larger $D_{\max}/B$. Bearing capacity issues for cases with $D = D_{\max} = D_{\min}$ were recently discussed in [3], where soil strength in the depth range D above the foundation level was also taken into account. The omission of soil strength above the foundation level is typically justified by its favorable, though little, contribution to the total footing capacity—owing to the “small value” of the embedment ratio D/B . This approach originates from the pioneering concepts of K. Terzaghi and is considered as a conservative simplification. However, defining embedment ratios as “small” even for values as large as $D/B = 3$, as suggested in [4], raises doubts. Neglecting the strength of soil above the foundation level may be overly conservative (and uneconomical), since backfill is usually built-in under controlled conditions using high-quality materials, often superior to the native subsoil beneath the foundation. A fundamental concern, however, arises from the separation of the three components in expression (1a). While the term $c \cdot N_c$ is theoretically justified, Terzaghi’s independent treatment of the remaining two components is a highly debatable simplification. The soil behavior below and above the foundation level is inherently coupled; therefore, in some studies these two capacity components are considered jointly [2, 3, 5]. We adopted this approach as well, determining an equivalent single value through elasto-plastic FEM analysis, as in [3, 5÷8].

Nevertheless, the problem is not unequivocal. It cannot be excluded *a priori* that the footing bearing capacity may decrease when $D_{\max} > D_{\min}$, due to several factors:

- 1) treating the soil mass below and above the foundation as a single continuum may alter the slip-line geometry beneath the footing, e.g. reducing the extent of the displacement zone schematically shown in Figure 1a as H_q, L_q ;
- 2) the stresses at foundation level adjacent to the footing are no longer purely vertical;
- 3) the “deviatoric” case with $D_{\max} \gg D_{\min}$ (Figure 1b) generates unfavorable shear stresses τ in the soil, even in the absence of the footing;
- 4) an unfavorable resultant horizontal earth pressure develops from the backfill—both the direct horizontal load on the foundation wall and the induced eccentricity of the vertical footing load negatively affect the bearing capacity [1].

It appears that calculation scenarios with $D_{\max} > D_{\min}$ have not been widely discussed in the literature.

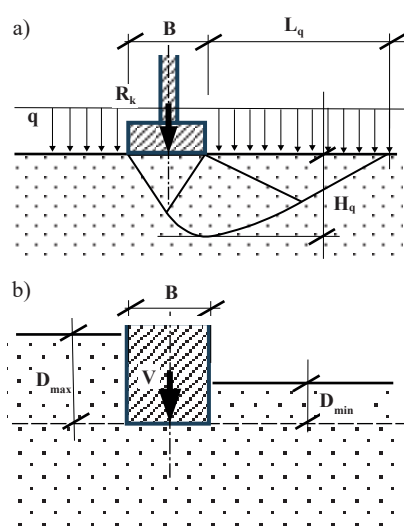


Fig. 1. GEO-bearing capacity [1] for a strip foundation: a) a standard design situation with a flexible load q [kPa], $q = D \cdot \gamma$ as in [1]; b) a considered strip foundation embedded in a subsoil, $D_{\max} \geq D_{\min}$

Rys. 1. Nośność geotechniczna GEO [1] ławy fundamentowej: a) standardowa sytuacja obliczeniowa z obciążeniem wiotkim q [kPa], $q = D \cdot \gamma$ jak w [1]; b) rozpatrywany fundament zagłębiony w gruncie, $D_{\max} \geq D_{\min}$

gdyż np. zasypka jest zazwyczaj wykonywana w warunkach kontrolowanych i z gruntów o dobrej jakości, często lepszych od gruntów rodzimych poniżej poziomu posadowienia. Zasadnicze wątpliwości budzi jednak samo wyodrębnienie trzech oddzielnych składników w wyrażeniu (1a); $c \cdot N_c$ we wzorze (1a) ma podstawy teoretyczne, ale oddzielne potraktowanie przez K. Terzagiego dwóch pozostałych elementów nośności jest uproszczeniem bardzo dyskusyjnym. Praca podłoża poniżej i powyżej poziomu posadowienia jest ze sobą sprzężona i dlatego w niektórych pracach traktowane są te dwa składniki nośności łącznie [2, 3, 5], co przyjęliśmy również w naszych badaniach, a jedną ekwiwalentną wartość wyznacza się za pomocą analizy sprężysto-plastycznej MES, m.in. w: [3, 5÷8]. Sprawa nie jest jednak jednoznaczna i nie da się *a priori* wykluczyć pewnego jednoczesnego zmniejszenia nośności ławy w przypadku $D_{\max} > D_{\min}$, ponieważ:

- 1) potraktowanie gruntu poniżej i powyżej fundamentu jako jedno *continuum* może zmienić kształt linii poślizgu pod ławą i np. zmniejszyć zasięg strefy wypierania podłoża, symbolicznie pokazanej na rysunku 1a jako H_q, L_q ;
 - 2) naprężenia w poziomie posadowienia obok ławy nie są wówczas pionowe;
 - 3) „deviatorowy” przypadek $D_{\max} \gg D_{\min}$ (rysunek 1b) generuje sam w sobie, bez ławy, niekorzystne naprężenia ścinające τ w podłożu;
 - 4) powstaje niekorzystne wypadkowe poziome parcie gruntu zasypowego i wówczas zarówno siła pozioma na ścianie fundamentowej, jak i spowodowany nią mimośród pionowego obciążenia ławy wpływają niekorzystnie na nośność podłoża [1].
- Jak się wydaje, sytuacje obliczeniowe typu $D_{\max} > D_{\min}$ nie są szeroko omawiane w literaturze.

wej stronie ławy zwrócili uwagę m.in. Rybak i Konderla [2], szacując zwiększenie nośności ławy na kilkanaście procent, gdy $D_{\min} \sim (0.5 \div 1.0) \cdot B$, przy $D_{\max} \sim 1.5 \cdot B$ oraz nawet na kilkadziesiąt procent w przypadku mniejszych $D_{\min}/B$ przy większych $D_{\max}/B$. Zagadnienie nośności w różnych przypadkach $D = D_{\max} = D_{\min}$ opisano ostatnio szczegółowo w pracy [3], uwzględniając wytrzymałość gruntu do głębokości D powyżej poziomu posadowienia ławy.

Pomijanie wytrzymałości gruntu powyżej poziomu posadowienia bezpośredniego tłumaczy się zazwyczaj jego korzystnym, choć niewielkim, wpływem na całkowitą nośność ławy z powodu „małej wartości” zagłębienia fundamentu D/B . Ma to swoje źródło w pionierskich koncepcjach K. Terzagiego i jest uproszczeniem w stronę bezpieczną, chociaż wątpliwości budzi przyjmowanie za „małą” wartości zagłębienia nawet $D/B = 3$ wg [4]. Pomijanie wytrzymałości gruntu powyżej poziomu posadowienia może okazać się zbyt konserwatywne (nieekonomiczne),

Objective and Scope of the Study

For cases with $D_{\max} \geq D_{\min}$, there are no analytical solutions that describe, in a unified form, the coupled effect of two interacting soil layers—above and below the foundation level. This lack of solutions served as the motivation for carrying out numerical simulations aimed at investigating this influence. The objective of the study presented in this paper is to provide a numerical assessment of the impact of the strength of the soil—conventionally referred to as a backfill—on the implicit safety margin in the bearing capacity condition (1a). This is expressed by introducing a dimensionless correction factor $d_D \geq 1$:

$$R_k = B \cdot (c \cdot N_c + q \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma) \cdot d_D \quad (1b)$$

A similar approach, while retaining the traditional structure of equation (1), has also been adopted by other authors [3, 4], though with some corrections applied separately to individual bearing capacity factors N , i.e. through distinct correction coefficients d_c , d_q , d_γ for the respective components of equation (1). In the present study, we employed finite element method (FEM) analyses in the elasto-plastic range. In this context, it is not necessary to separate the correction factor d into individual components of equation (1), particularly since these three components are not physically independent. For this reason, as proposed in [2], the effects of q and γ were combined, and the bearing capacity of cohesionless soil was expressed as: $R = \gamma \cdot B^2 \cdot N_{q\gamma}$. When accounting for the beneficial surcharge from an adjacent footing [2], this becomes: $R^* = \gamma \cdot B^2 \cdot N_{q\gamma}^*$, which corresponds to introducing an enhancing correction factor: $d_D = N_{q\gamma}^*/N_{q\gamma}$ so that $R^* = R \cdot d_D$. A similar rationale applies to cases of varying ground surface levels next to the foundation. Such a correction, expressed as a single coefficient d_D , simplifies practical application, while directly referring to the code-based formula (1a) given in [1]. A comparable unified treatment of the bearing capacity enhancement effect is also advocated in [3].

Assumptions and Input Data for the Numerical Model

The analyses were carried out using the code Plaxis® v.7.2, applying an elastic–perfectly plastic soil model with the Coulomb–Mohr failure criterion and a non-associated plastic flow rule. Standard settings and convergence parameters were adopted [5, 9]: plane strain conditions, approximately 4500 six-node triangular elements, no interface elements, vertically applied central footing loads monotonically increasing up to the maximum attainable value $V_{\max}$ [kN/m], the standard 3% unbalanced force tolerance in iterations, and the recommended dilation angle $\psi = \max \{\phi - 30^\circ; 0^\circ\}$. The footing was modeled as weightless and rigid, with a horizontal base and rough contact surface. Superstructure stiffness was not included in the model. A single strip footing was considered, and during settlement it was allowed to undergo horizontal displacement and rotation, which is typical for cases with $D_{\max} > D_{\min}$. Constant soil parameters were assumed, independent of the magnitude and history of loads or strains, and thus also inde-

Cel i zakres pracy

W przypadku $D_{\max} \geq D_{\min}$ nie istnieją rozwiązania analityczne, które w jednej postaci opisywałyby efekt sprzężenia dwóch współpracujących warstw gruntu – powyżej i poniżej poziomu posadowienia ławy. Było to motywacją do podjęcia numerycznych symulacji w kierunku rozpoznania tego wpływu. Celem pracy zaprezentowanej w artykule jest numeryczna ocena wpływu wytrzymałości gruntu, zwanego umownie zasypowym, na niejawną zapas bezpieczeństwa w warunku nośności (1a), czyli wprowadzenie bezwymiarowego współczynnika korekcyjnego $d_D \geq 1$:

$$R_k = B \cdot (c \cdot N_c + q \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma) \cdot d_D \quad (1b)$$

Podobne podejście, z zachowaniem tradycyjnej struktury wzoru (1), stosują również autorzy prac [3, 4], ale z ewentualną korektą poszczególnych parametrów nośności N , czyli odrębnymi współczynnikami korekcyjnymi d_c , d_q , d_γ – odpowiednio w każdym ze składników nośności (1). W naszej pracy wykorzystaliśmy obliczenia MES w zakresie sprężysto-plastycznym. Rozdzielanie korekt d na odrębne składniki wzoru (1) nie jest w tej sytuacji konieczne, szczególnie że te 3 składniki w (1) nie są fizycznie niezależne. Z tego powodu już wcześniej w pracy [2] połączono wpływ q oraz γ , a ocena nośności gruntu niespoistego ma postać $R = \gamma \cdot B^2 \cdot N_{q\gamma}$. Uwzględniając korzystne obciążenie od sąsiedniej ławy, jest to $R^* = \gamma \cdot B^2 \cdot N_{q\gamma}^*$, co oznacza wprowadzenie współczynnika korekcyjnego (zwiększającego) $d_D = N_{q\gamma}^*/N_{q\gamma}$ i wówczas $R^* = R \cdot d_D$. Podobnie jest w przypadku zróżnicowanego poziomu terenu przy fundamencie. Taka korekta w postaci jednego współczynnika d_D upraszcza zastosowanie praktyczne, nawiązując bezpośrednio do wzoru normowego (1a) wg [1]. Za analogicznym ujęciem efektu zwiększenia nośności optuje również [3].

Założenia i dane do modelu numerycznego

W przypadku modelu sprężysto-idealnie plastycznego, z warunkiem granicznym Coulomba-Mohra i niestowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia, zastosowano program Plaxis® v.7.2. Przyjęto standardowe ustawienia i parametry zbieżności [5, 9]: płaski stan przemieszczenia; ok. 4500 trójkątnych elementów 6-węzłowych, bez elementów kontaktowych; pionowe centralne obciążenia fundamentu monotonicznie rosnące aż do maksymalnej możliwej wartości $V_{\max}$ [kN/m], standardowe 3% tolerancji nierównowagi sił w iteracjach; rekomendowany kąt dyatacji $\psi = \max \{\phi - 30^\circ; 0^\circ\}$ i zamodelowano nieważki oraz sztywny fundament ławowy o poziomej podstawie i szorstkiej powierzchni. Nie uwzględnia się sztywności nadbudowy. Fundament jest pojedynczy, a w trakcie osiadania ława może ulegać również poziomemu przesunięciu i obrotowi, co jest typowe, gdy $D_{\max} > D_{\min}$. Zakłada się stałe wartości parametrów modelu, w tym niezależność wytrzymałości gruntu od wartości i historii obciążeń/odkształceń, a więc również od głębokości poniżej poziomu terenu. Skończony obszar dyskretyzacji odpowiadający rysunkowi 1b, z centralnie zlokalizowaną ławą fundamentową ma





pendent of depth below the ground surface. The discretized domain, corresponding to Figure 1b with a centrally located strip footing, was 24 m in length and 10÷12 m in height. This ensured the elimination of boundary effects for footing widths $B \leq 2.5$ m and embedment depths satisfying $D_{\min} \leq D_{\max} \leq 2.5$ m while the dimensions L_q and H_q in Figure 1a were exceeded by at least a factor of 2÷4.

Two representative soils, assumed identical beneath and adjacent to the footing, were analyzed:

1) Medium sand (MSa): internal friction angle $\phi = 33^\circ$, natural moisture or free-draining conditions; for numerical stability, a small cohesion value $c = 2$ kPa [5, 9] with “cut-off” option was introduced; unit weight $\gamma = 17.5$ kN/m³; deformation parameters in the pre-failure state do not affect the estimated ultimate load;

2) Clay (Cl): $\phi = 12^\circ$, cohesion $c = 40$ kPa, unit weight $\gamma = 18.5$ kN/m³.

Calibration of the Computational Model for $q = \text{const}$ (MSa)

Under the assumptions shown in Figure 1a, the geotechnical bearing capacity R_k according to Eurocode EC7-1 [1] and formula (1a), for a footing of width $B = 1.0$ m and embedment depth $D = 1.0$ m, is:

$$\begin{aligned} R_k &= B \cdot [c \cdot N_c + D \cdot \gamma \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma] = \\ &= 1.0 \cdot [2.0 \cdot 38.6 + 1.0 \cdot 17.5 \cdot 26.1 + \frac{1}{2} \cdot 17.5 \cdot 1.0 \cdot 32.6] = \\ &= 819 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

The Plaxis code provides good agreement with this value, bearing in mind that numerical discretization and iteration errors can be estimated at 2÷3%. The maximum recorded external load on the footing (the so-called *Load B* in the calibration test) was 827 kPa (Figure 2b). Since the surcharge (*Load A* at the foundation level, $q = 17.5$ kPa) was applied along the entire boundary, including the footing itself (Figure 2a), the bearing capacity obtained from nu-

dlugość 24 m i wysokość 10÷12 m. Pozwoliło to wyeliminować efekt brzegu w przypadku szerokości ławy $B \leq 2.5$ m oraz $D_{\min} \leq D_{\max} \leq 2.5$ m, a wartości L_q oraz H_q z rysunku 1a są co najmniej 2÷4-krotnie przekroczone.

Analizuje się dwa reprezentatywne grunty, takie same pod ławą i obok ławy:

1) piasek średni (MSa) o kącie tarcia wewnętrznego $\phi = 33^\circ$ i naturalnej wilgotności lub swobodnym drenażu; w celu poprawy stabilności numerycznej przyjmuje się niewielką spójność $c = 2$ kPa [5, 9] z opcją *cut-off*, ciężar objętościowy gruntu $\gamma = 17.5$ kN/m³ (parametry odkształceniowe w stanie przedgranicznym nie wpływają na szacowaną wartość siły granicznej);

2) ił (Cl), $\phi = 12^\circ$, $c = 40$ kPa, $\gamma = 18.5$ kN/m³.

Kalibracja modelu obliczeniowego w przypadku $q = \text{const}$ (MSa)

Przy założeniach z rysunku 1a, nośność GEO [1], wg wzoru (1a), w przypadku ławy o szerokości $B = 1.0$ m przy zagłębieniu $D = 1.0$ m wynosi

$$\begin{aligned} R_k &= B \cdot [c \cdot N_c + D \cdot \gamma \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma] = \\ &= 1.0 \cdot [2.0 \cdot 38.6 + 1.0 \cdot 17.5 \cdot 26.1 + \frac{1}{2} \cdot 17.5 \cdot 1.0 \cdot 32.6] = \\ &= 819 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

Program Plaxis daje dobrą zgodność z tym wynikiem, mając na uwadze, że błąd numeryczny siatkowania oraz iteracji można szacować na 2÷3%. Odczytana maksymalna wartość zewnętrznego obciążenia ławy (tzw. *Load B* w teście kalibrującym) wynosi 827 kPa, (rysunek 2b). W związku z tym, że wiotkie obciążenie, tzw. *Load A* poziomu posadowienia ($q = 17.5$ kPa), zostało przyłożone na całym brzegu, łącznie z fundamentem (rysunek 2a), wartość nośności otrzymaną z analizy numerycznej należy zwiększyć o $q \cdot B = 17.5$ kN/m. Ostatecznie, za pomocą MES, otrzymano $V_{\max} = 827 \cdot 1.0 + 17.5 \cdot 1.0 \approx 845$ kN/m, jako ocenę normowej nośności GEO, która wynosi $R_k = 819$ kN/m (3% różnicy).

Dobra zbieżność $V_{\max} \approx R_k$ obu metod, w tej samej sytuacji obliczeniowej, nie jest jednak regułą dla innych wartości B . W wa-

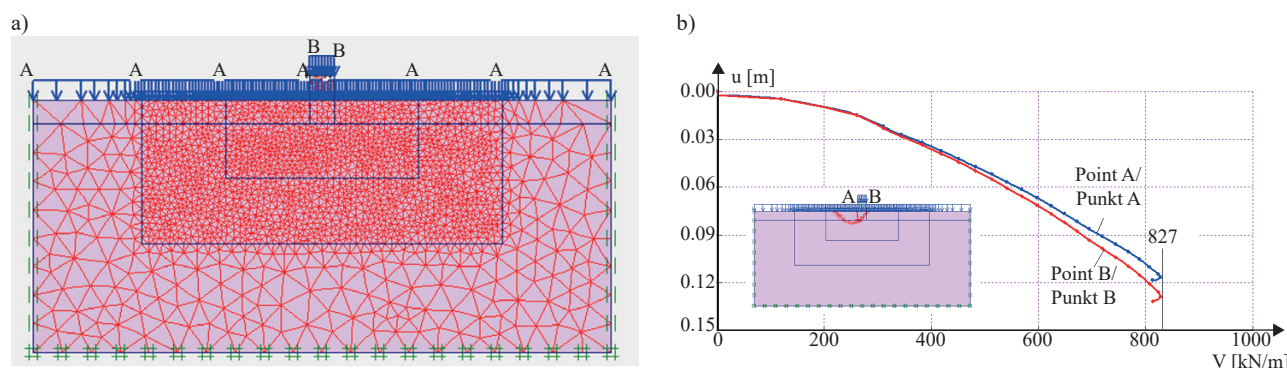


Fig. 2. FEM-calibration for a flexible load q for the strip foundation width $B = 1.0$ m: a) $q = \text{Load A}$ applied to the entire founding level and $V = (\text{Load B}) \cdot xB$ [kN/m] on the beam; b) estimation of the ultimate vertical load (*Load B*) $xB = 827$ kN/m derived from subsidence curves $u(V)$ for two lower corners of the foundation ($A = \text{the left}$ and $B = \text{the right one}$)

Rys. 2. Kalibracja MES w przypadku wiotkiego obciążenia q i szerokości ławy $B = 1.0$ m: a) $q = \text{Load A}$ na całym poziomie posadowienia oraz $V = (\text{Load B}) \cdot xB$ [kN/m] na ławie; b) oszacowanie granicznego pionowego obciążenia (*Load B*) $xB = 827$ kN/m wyprowadzone z krzywych osiadania $u(V)$ dwóch dolnych naroży fundamentu ($A = \text{lewego}$, $B = \text{prawego}$)



merical analysis should be increased by $q \cdot B = 17.5 \text{ kN/m}$. Consequently, using FEM analysis, the ultimate load was obtained as: $V_{\max} = 827 \cdot 1.0 + 17.5 \cdot 1.0 \cong 845 \text{ kN/m}$, which can be regarded as the numerical assessment of the code-based bearing capacity, compared to $R_k = 819 \text{ kN/m}$ (a difference of 3%).

However, the close agreement $V_{\max} \cong R_k$ observed for this case is not a general rule for other footing widths B . Under conditions comparable to those in Figure 1a, i.e. with a surcharge load $q = 17.5 \text{ kPa}$, the following trends are observed: 1) for a footing width $B \sim 0.5 \text{ m}$, the Eurocode EC7-1 capacity R_k is underestimated relative to $V_{\max}$ by approximately 5÷15%; 2) for a footing width $B \geq 2.0 \text{ m}$, the Eurocode EC7-1 capacity R_k is overestimated relative to $V_{\max}$ by approximately 5÷8%. The view expressed in [4] that the bearing capacity R_k is underestimated due to the conservative values of the bearing capacity factor N_γ in formula (1a) may therefore be valid only for “small” footing widths B , a conclusion that can even be supported by small-scale model tests; for “large” footing widths B , however, the situation is reversed.

Example Calculation for $D = D_{\max} = D_{\min}$ (MSa)

As an illustrative example of the computational method applied in the subsequent part of this study, a FEM scheme was analyzed corresponding to that shown in Figure 1b. In this case, the same footing with width $B = 1.0 \text{ m}$ was embedded to a depth of $D_{\max} = D_{\min} = 1.0 \text{ m}$ in the native soil, with unit weight $\gamma = 17.5 \text{ kN/m}^3$, identical to that beneath the footing. Unlike in the previous case, no explicit surcharge load $q = 17.5 \text{ kPa}$ was applied, and additional friction forces were present along the lateral (vertical) faces of the foundation wall above the foundation level. The external load capacity obtained from FEM analysis was $V_{\max} = 1041 \text{ kN/m}$ (estimated analogously to Figure 2b). This allows for the determination of the correction factor with respect to formula (1a) as: $d_D = V_{\max}/R_k = 1041/819 = 1.27$. Thus, in the analyzed calculation scheme, accounting for the strength of the soil adjacent to the foundation increases the footing bearing capacity by 27%. Practically the same result, $V_{\max} \cong 1036 \text{ kN/m}$, was obtained by introducing contact elements with full strength ($R_{\text{int}} = 1.0$) along the foundation walls, i.e. vertically from the footing corners up to the ground surface. The minor difference is due solely to variations in the FEM mesh. The case analyzed with $R_{\text{int}} = 0.02 \cong 0$, eliminating wall friction, yielded $V_{\max} = 996 \text{ kN/m}$. This result indicates that, within the 27% increase in bearing capacity, approximately 21% is attributable to the strength of the backfill soil mass, while only 6% arises from wall friction – both contributions being considered for the embedment depth $D_{\max} = D_{\min} = 1.0 \text{ m}$ above the foundation level. This outcome follows from the fact that at shallow depths below the unloaded ground surface horizontal stresses are small. Consequently, even though the ultimate shear strength is reached along the vertical foundation faces, this does not turn into substantial vertical resistance forces.

runkach porównywalnych, jak na rysunku 1a, tj. z zakładanym obciążeniem wiotkim $q = 17.5 \text{ kPa}$: 1) przy szerokości ławy $B \sim 0.5 \text{ m}$ nośność R_k wg Eurokodu EC7-1 jest niedoszacowana względem $V_{\max}$ o ok. 5÷15%; 2) przy szerokości ławy $B \geq 2.0 \text{ m}$ nośność R_k wg Eurokodu EC7-1 jest przeszacowana względem $V_{\max}$ o 5÷8%. Opinia wyrażona w pracy [4] o niedoszacowaniu nośności R_k na skutek zaniżonych wartości współczynnika nośności N_γ we wzorze (1a), może być więc zasadna tylko w przypadku „małych” szerokości ławy B , nawet z potwierdzeniem w małoskalowych badaniach modelowych, natomiast nie w przypadku „dużej” szerokości ławy B , gdzie sytuacja jest odwrotna.

Przykład obliczeń w przypadku $D = D_{\max} = D_{\min}$ (MSa)

Jako materiał ilustracyjny metody obliczeniowej stosowanej w dalszej części pracy rozpatrzono schemat MES nawiązujący do przedstawionego na rysunku 1b, w którym ta sama ława o szerokości $B = 1.0 \text{ m}$ jest zagłębiona na głębokość $D_{\max} = D_{\min} = 1.0 \text{ m}$ w gruncie rodzimym o ciężarze objętościowym $\gamma = 17.5 \text{ kN/m}^3$, takim samym jak pod fundamentem. Tym razem nie stosuje się *explicite* wiotkiego obciążenia $q = 17.5 \text{ kPa}$, a ponadto występują siły tarcia na bocznych (pionowych) powierzchniach ścian fundamentowej powyżej poziomu posadowienia. Otrzymana z obliczeń MES wartość obciążenia zewnętrznego wynosi $V_{\max} = 1041 \text{ kN/m}$ (szacowana analogicznie jak na rysunku 2b), co pozwala określić współczynnik korekcyjny, w odniesieniu do wzoru (1a), na $d_D = V_{\max}/R_k = 1041/819 = 1.27$. A zatem, w analizowanej sytuacji obliczeniowej, uwzględnienie wytrzymałości gruntu obok fundamentu zwiększa nośność ławy o 27%.

Praktycznie taki sam wynik $V_{\max} \cong 1036 \text{ kN/m}$ osiąga się, wprowadzając elementy kontaktowe o pełnej wytrzymałości ($R_{\text{int}} = 1.0$) wzdłuż ścian fundamentowej, tj. pionowo od dolnych naroży fundamentu do poziomu terenu. Różnica wynika tylko z nieznacznie różniących się siatek MES. Przeanalizowany przypadek $R_{\text{int}} = 0.02 \cong 0$ pozwala natomiast wyeliminować tarcie na ścianie fundamentowej, a otrzymany w tej sytuacji wynik $V_{\max} = 996 \text{ kN/m}$ prowadzi do wniosku, że na zwiększenie o 27% nośności składa się w tym przypadku 21% wzrostu spowodowanego wytrzymałością gruntu zasypowego w jego objętości, a tylko 6% stanowi wzrost spowodowany tarcie gruntu na powierzchni ścian fundamentowej – w obu przypadkach przy głębokości $D_{\max} = D_{\min} = 1.0 \text{ m}$ powyżej poziomu posadowienia. Wynika to z tego, że na małej głębokości poniżej nieobciążonej powierzchni terenu występują małe wartości naprężeń poziomych i pomimo osiągnięcia stanu granicznego na ścinanie na pionowych powierzchniach fundamentu, ten stan graniczny nie przekłada się na duże siły pionowe.

Analiza numeryczna gruntu niespoistego przy $D_{\max} \geq D_{\min}$ (MSa)

W lewej części tabeli, dotyczącej gruntu niespoistego, zestawiono wyniki numeryczne na bazie R_k oraz $V_{\max}$ z MES przy różnych $D_{\min} [\text{m}]$, $D_{\max} [\text{m}]$ oraz $B [\text{m}]$, w odniesieniu do nośności R_k ze wzoru (1a), która nie zależy od $D_{\max}$ i tylko w ograniczonym stopniu zależy od $D_{\min}$ przez $q = \gamma \cdot D_{\min}$.



Numerical Analysis for $D_{\max} \geq D_{\min}$

The left-hand side of Table, concerning the non-cohesive soil, presents numerical results based on both R_k and $V_{\max}$ from FEM analyses for different values of $D_{\min}$ [m], $D_{\max}$ [m] and B [m]. These are compared with the bearing capacity R_k calculated from formula (1a), which is independent of $D_{\max}$ and only weakly dependent on $D_{\min}$, through the surcharge $q = \gamma D_{\min}$. In the literature [2÷5], the effect of embedment depth $D = D_{\max} = D_{\min}$ is commonly expressed in a dimensionless form as a function $d = d(D/B)$, typically represented as: $1 + a \cdot (D/B)^a > 1$. The results on the left-hand side of Table 1 deviate from this dimensionless model. Specifically, in three cases, $1 = D/B = 0.5/0.5 = 1.0/1.0 = 1.5/1.5$, and additionally for $1 = D/B = 2.0/2.0$, significantly different values of d_D were obtained: 1.39; 1.28; 1.21; and 1.10, respectively. Instead of the dimensionless representation, we therefore adopted a dimensional form for presenting the obtained results, expressed as $d_D = d_D(B)$. These apply exclusively to the analyzed calculation scenarios with typical values of γ , ϕ , c and the given geometric dimensions.

W literaturze [2÷5] przedstawiono wpływ zagłębienia $D = D_{\max} = D_{\min}$ w wersji bezwymiarowej jako funkcję $d = d(D/B)$, zazwyczaj w postaci $1 + a \cdot (D/B)^a > 1$. Wyniki w lewej części tabeli wykazują odstępstwa od tego modelu bezwymiarowego, ponieważ w trzech przypadkach $1 = D/B = 0,5/0,5 = 1,0/1,0 = 1,5/1,5$ oraz dodatkowo też w przypadku $1 = D/B = 2,0/2,0$ otrzymano znacznie różniące się wartości d_D – kolejno: 1,39; 1,28; 1,21; 1,10. W miejsce bezwymiarowej, wybraliśmy zatem wymiarową postać prezentacji otrzymanych wyników $d_D = d_D(B)$, które dotyczą wyłącznie przeanalizowanych sytuacji obliczeniowych w przypadku typowych wartości parametrów γ , ϕ , c oraz podanych wymiarów.

Wykazane incydentalne zmniejszenie nośności ($d_D < 1,0$) należy uznać za nieracjonalne; otrzymane wartości d_D bliskie 1,0 mieszczą się wprawdzie w granicach 2÷3% błędu numerycznego, ale przyczyną tej „osobliwości” przy dużych wartościach B jest przede wszystkim zawyżona o kilka procent norma nośność R_k , co bezpośrednio rzutuje na wartość ilorazu $d_D = V_{\max}/R_k$. Zestawienie porównawcze wyników z tabeli zawiera rysunek 3.

The coefficients $d_D = V_{\max}/R_k$ for a non-cohesive (MSa) and a cohesive (CI) soil
Współczynniki $d_D = V_{\max}/R_k$ w przypadku gruntu niespoistego (MSa) i spoistego (CI)

NON-COHESIVE SOIL (MSa)/ GRUNT NIESPOISTY (MSa)						COHESIVE SOIL (CI)/ GRUNT SPOISTY (CI)					
D _{min} = 0.5											
D _{max}	B = 0.5	B = 1.0	B = 1.5	B = 2.0	B = 2.5	D _{max}	B = 0.5	B = 1.0	B = 1.5	B = 2.0	B = 2.5
0.5	1.39	1.15	1.07	1.03	0.98	0.5	1.89	1.49	1.38	1.30	1.26
1.0	1.65	1.31	1.12	1.08	0.97	1.0	2.04	1.66	1.46	1.35	1.30
1.5	1.65	1.31	1.11	1.07	0.97	1.5	2.15	1.73	1.50	1.38	1.35
2.0	1.61	1.30	1.07	1.02	0.97	2.0	2.32	1.77	1.54	1.42	1.39
2.5	1.42	1.21	1.02	1.01	1.00	2.5	2.35	1.84	1.56	1.48	1.41
D _{min} = 1.0											
D _{max}	B = 0.5	B = 1.0	B = 1.5	B = 2.0	B = 2.5	D _{max}	B = 0.5	B = 1.0	B = 1.5	B = 2.0	B = 2.5
1.0	1.58	1.28	1.19	1.10	1.03	1.0	2.32	1.80	1.54	1.44	1.37
1.5	1.62	1.27	1.17	1.08	1.04	1.5	2.46	1.87	1.60	1.47	1.41
2.0	1.66	1.26	1.15	1.07	1.04	2.0	2.66	1.92	1.65	1.51	1.44
2.5	1.67	1.26	1.17	1.08	1.04	2.5	2.68	1.98	1.69	1.56	1.48
D _{min} = 1.5											
D _{max}	B = 0.5	B = 1.0	B = 1.5	B = 2.0	B = 2.5	D _{max}	B = 0.5	B = 1.0	B = 1.5	B = 2.0	B = 2.5
1.5	1.70	1.34	1.21	1.13	1.06	1.5	2.66	1.98	1.68	1.54	1.45
2.0	1.74	1.35	1.21	1.14	1.04	2.0	2.88	2.06	1.75	1.58	1.50
2.5	1.88	1.36	1.23	1.17	1.07	2.5	2.93	2.13	1.79	1.65	1.54

The incidental decreases in bearing capacity ($d_D < 1.0$) should be regarded as non-physical. Although the obtained values of d_D close to 1.0 fall within the 2÷3% margin of numerical error, the primary cause of this “anomaly” for large B is the overestimation of the normative bearing capacity R_k by several percent. This, in turn, directly affects the ratio $d_D = V_{\max}/R_k$.

A comparative summary of the results from Table is presented in Figure 3.

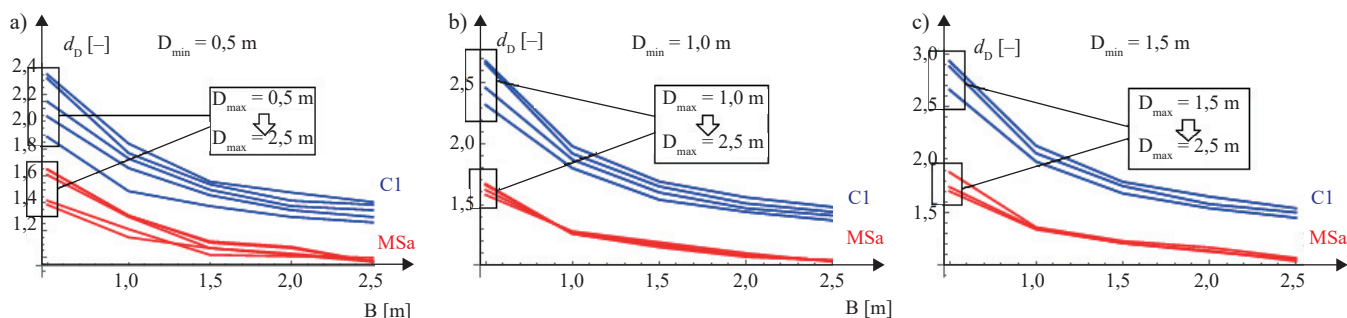


Fig. 3. Plots of the functions $d_D(B)$ for a noncohesive (MSa) and a cohesive (CI) soil : a) $D_{\min} = 0,5$ m; b) $D_{\min} = 1,0$ m, c) $D_{\min} = 1,5$ m
Rys. 3. Wykresy funkcji $d_D(B)$ w przypadku gruntu niespoistego (MSa) i spoistego (CI): a) $D_{\min} = 0,5$ m; b) $D_{\min} = 1,0$ m, c) $D_{\min} = 1,5$ m

Numerical Analysis for $D_{\max} \geq D_{\min}$. Cohesive Soil (CI)

Analogous results for $D_{\max} \geq D_{\min}$ in the case of cohesive soil are presented in the right-hand part of Table. The analysis of this soil was preceded by calibration of the FEM model under a flexible load q , as shown in Figure 1a. Calculations for $0.5 \text{ m} \leq B \leq 2.5 \text{ m}$ demonstrated that the design formula (1a), when applied to the cohesive soil, consistently underestimates the bearing capacity by several percent compared to the maximum load $V_{\max}$ obtained from FEM. The values of the coefficient d_D in Table are considerably higher in the case of the cohesive soil, even after accounting for the several-percent underestimation of the bearing capacity R_k . On the embedded surfaces of the foundation walls, maximum friction was assumed ($\tan \delta = \tan \phi$), but a much more favorable effect is provided by the assumed maximum adhesion ($a = c = 40 \text{ kPa}$), which is independent of normal stresses.

Conclusions

1) Eurocode EC7-1 recommends the basic Terzaghi formula (1a), which defines the bearing capacity R_k of a shallow strip footing. This expression can be verified through numerical analysis using the FEM method. Elasto-plastic modeling considerably extends the possibilities of addressing practical design situations and provides both qualitative and quantitative results. It also helps to determine whether the normative simplifications are safe and whether they may lead to overdesign of foundations.

2) In all analyzed cases (Table, Figure 3), accounting for the strength of the soil adjacent to the footing has a significant, often very significant, beneficial effect on the bearing capacity of the subsoil. In practice, this almost always yields $d_D = V_{\max}/R_k > 1.0$, and even for cohesive soils $d_D > 2.0$. Con-

Analiza numeryczna gruntu spoistego przy $D_{\max} \geq D_{\min}$

Analogiczne wyniki przy $D_{\max} \geq D_{\min}$ w przypadku gruntu spoistego przedstawiono w prawej części tabeli. Analizę tego gruntu poprzedzono kalibracją modelu MES przy obciążeniu wiotkim q wg rysunku 1a; obliczenia w przypadku $0,5 \text{ m} \leq B \leq 2,5 \text{ m}$ wykazały, że wzór normowy (1a), zastosowany do gruntu spoistego systematycznie zaniża nośność

o kilkanaście procent w stosunku do siły $V_{\max}$ pochodzącej z MES. Wartości współczynnika d_D w tabeli są w przypadku gruntu spoistego znacznie większe, nawet korygując kilkunastoprocentowe zaniżenie nośności R_k . Na zagłębionych powierzchniach ścian fundamentowych przyjęto maksymalne tarcie ($\tan \delta = \tan \phi$), ale znacznie większy jest korzystny wpływ przyjętej maksymalnej adhezji ($a = c = 40 \text{ kPa}$), która nie zależy od naprężeń normalnych.

Wnioski

1) Eurokod EC7-1 rekomenduje podstawowy wzór Terzaghi (1a), określający nośność R_k bezpośredniego posadowienia ławy fundamentowej, który może być zweryfikowany za pomocą analizy numerycznej MES. Modelowanie sprężysto-plastyczne znacznie zwiększa możliwości rozwiązywania praktycznych sytuacji obliczeniowych i daje wyniki jakościowe oraz ilościowe, a także odpowiada na pytania, czy przyjęte uproszczenia normowe są bezpieczne i czy nie prowadzą do przewymiarowania fundamentów.

2) We wszystkich przeanalizowanych przypadkach (tabela, rysunek 3) uwzględnienie wytrzymałości gruntu obok fundamentu ma duży lub nawet bardzo duży korzystny wpływ na nośność podłoża, czyli praktycznie zawsze $d_D = V_{\max}/R_k > 1,0$, a nawet w przypadku gruntów spoistych $d_D > 2,0$; uwzględnienie jedynie ciężaru gruntu obok fundamentu [1] jako obciążenia wiotkiego q [kPa] w poziomie płytkiego posadowienia jest obliczeniowo wygodne, ale nieekonomiczne.

3) Bardzo korzystny jest nie tylko wpływ zagłębienia $D = D_{\max} = D_{\min}$, ale także dewiatora $D_{\max} - D_{\min} > 0$, chociaż w mniejszej skali (nie przekracza on kilkunastu procent); wyjątkiem jest bardzo płytkie posadowienie ($D_{\min} = 0,5 \text{ m}$) relatywnie wąskich ław ($B \leq 1,0 \text{ m}$), gdy przy $D_{\max} = 2,0 \text{ m}$ oraz $D_{\max} = 2,5 \text{ m}$ korzystne efekty zmniejszają się, ponieważ za-



sidering only the weight of the soil adjacent to the footing [1] as a flexible surcharge q [kPa] at shallow foundation level is computationally convenient but uneconomical.

3) A highly favorable effect is produced not only by embedment $D = D_{\max} = D_{\min}$, but also by the deviator $D_{\max} - D_{\min} > 0$, although on a smaller scale (not exceeding several percent). An exception occurs in the case of very shallow foundations ($D_{\min} = 0.5$ m) with relatively narrow footings ($B \leq 1.0$ m), where for $D_{\max} = 2.0$ m and $D_{\max} = 2.5$ m the beneficial effects diminish, as the unfavorable influence of the resultant horizontal earth pressure of the backfill on the stability of the footing begins to be noticeable.

4) Friction along the embedded vertical faces of the foundation walls contributes only marginally to the increase in the bearing capacity of the footing, in contrast to the adhesion of cohesive soil on these surfaces. The displacement zones of soil beneath the footing at the ultimate limit state are smaller in extent than those assumed in the Terzaghi scheme shown in Figure 1a, and the slip lines extend almost rectilinearly into the zone of backfill soil $D_{\min}$ above the foundation level.

5) The calculations revealed a strong dependence of the coefficient d_B on footing width B , while also showing no significant increase in bearing capacity in cohesionless soils for $B = 2.0 \div 2.5$ m (Figure 3). This is not the case for cohesive soils, since a substantial portion of the additional stabilizing forces acting on the footing is provided by adhesion forces on the foundation walls, which are independent of width B and depend solely on $D_{\max}$ and $D_{\min}$.

czyna być zauważalny niekorzystny wpływ wypadkowego poziomego parcia gruntu zasypowego na stateczność ławy fundamentowej.

4) Tarcie na powierzchni zagłębionych pionowych ścian fundamentowych tylko w małym stopniu przyczynia się do zwiększenia nośności ławy w przeciwieństwie do adhezji gruntu spoistego na tych powierzchniach. Strefy wypierania gruntu spod ławy mają w stanie granicznym mniejszy zasięg niż w schemacie Terzagiego pokazanym na rysunku 1a, a linie poślizgu w sposób niemal prostoliniowy przedłużają się, wchodząc w strefę gruntu zasypowego $D_{\min}$ powyżej poziomu posadowienia.

5) Obliczenia wykazały silną zależność współczynnika d_B od szerokości ławy B , ale też brak istotnego zwiększenia nośności w gruncie niespoistym już przy $B = 2.0 \div 2.5$ m (rysunek 3). W gruntach spoistych tak nie jest, ponieważ znaczną część dodatkowych sił stabilizujących ławę stanowią siły adhezji na ścianach fundamentowych, które nie zależą od szerokości B , a jedynie od $D_{\max}$ oraz $D_{\min}$.

Received: 24.03.2025
Revised: 12.05.2025
Published: 19.09.2025

Artykuł wpłynął do redakcji: 24.03.2025 r.
Otrzymano poprawiony po recenzjach: 12.05.2025 r.
Opublikowano: 19.09.2025 r.

Literature

- [1] PN-EN 1997-1: Eurokod 7. Projektowanie geotechniczne. Część 1: Zasady ogólne.
- [2] Rybak C., Konderla P. Interférence de semelles filantes dans le domaine plastique. Rev Franç Géotech, 1993;64:5-9.
- [3] Pantelidis L. Bearing capacity of shallow foundations: a focus on the depth factors in combination with the respective N -factors. Arabian Journal of Geosciences. 2024; <https://doi.org/10.1007/s12517-024-11976-7>.
- [4] Giroud J-P, Nhiem T-V, Obin, J-P. Tables pour le calcul des fondations. Tome 3: Force portante, 1973. Paris-Bruxelles-Montréal: Dunod.
- [5] Zadroga B., Malesiński K. Stateczność fundamentów bezpośrednich. Badania modelowe i analizy numeryczne. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej; 2010.
- [6] Salgado R, Lyamin AV, Sloan SW, Yu HS. Two- and three-dimensional bearing capacity of foundations in clay. Géotechnique. 2004; <https://doi.org/10.1680/geot.2004.54.5.297>.
- [7] Lyamin AV, Salgado R, Sloan SW, Prezzi M. Two-and three-dimensional bearing capacity of footings in sand. Géotechnique. 2007; <https://doi.org/10.1680/geot.2007.57.8.647>.
- [8] Nguyen VQ, Merifield RS. Two-and three-dimensional undrained bearing capacity of embedded footings, 2012; Aust. Geomech. J. 42:2.
- [9] PLAXIS® v.7.2. User's Manual.