

dr hab. inż. Bartłomiej Stepień¹⁾

ORCID: 0000-0002-6578-9693

Statistical methods for determining sound power level

Statystyczne metody wyznaczania poziomu mocy akustycznej

DOI: 10.15199/33.2025.08.15

Abstract. The study on the usefulness and effectiveness of the bootstrap method and the Bayesian approach for determining sound power levels in real-life conditions was conducted using actual measurement data. The study determined the minimum sample size required for reliable determination of sound power level using both statistical methods. The conclusions were based on the results of non-parametric Kruskal-Wallis and Tukey-Kramer statistical tests at a significance level of $\alpha = 0.05$. The conducted analysis have shown that in order to obtain reliable estimates of the sound power level, it is necessary to have at least a 5-element measurement sample for the bootstrap method and a 4-element sample for the Bayesian approach. The average bias of the bootstrap estimator was 0.51 dB, while that of the Bayesian estimator was 0.75 dB. The analysis revealed significant statistical differences between the sound power levels determined using the bootstrap method and Bayesian inference.

Keywords: sound power level; bootstrap method; Bayesian inference; uncertainty.

Streszczenie. Badanie przydatności i skuteczności metody bootstrap oraz wnioskowania bayesowskiego do wyznaczenia poziomu mocy akustycznej w warunkach rzeczywistych przeprowadzono, wykorzystując rzeczywiste dane pomiarowe. Wyznaczono minimalny rozmiar próby pomiarowej wymagany do wiarygodnego określenia poziomu mocy akustycznej w przypadku wykorzystania obu metod statystycznych. Wnioskowanie bazuje na wynikach nieparametrycznych testów statystycznych Kruskala-Wallisa oraz Tukeya-Kramera przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Przeprowadzone analizy wykazały, że w celu uzyskania wiarygodnych estymat poziomu mocy akustycznej konieczna jest co najmniej 5-elementowa próba pomiarowa w przypadku metody bootstrap oraz 4-elementowa w podejściu bayesowskim. Średnie obciążenie estymatora bootstrap wyniosło 0,51 dB, natomiast estymatora bayesowskiego – 0,75 dB. Analiza wykazała, że poziomy mocy akustycznej wyznaczone za pomocą metody bootstrap i wnioskowania bayesowskiego istotnie się różnią statystycznie między sobą.

Słowa kluczowe: poziom mocy akustycznej; metoda bootstrap; wnioskowanie bayesowskie; niepewność.

The sound power level is a fundamental parameter used, among other things, for environmental noise modelling [1], assessing the risk of noise exposure at workplaces, comparing machinery and equipment [2] and in building acoustics, where it is used to assess the noise generated by equipment, technical equipment and installations. On the basis of knowledge of this parameter, calculations are also made of the required acoustic insulation of building partitions in order to reduce the transmission of external noise into the building and noise between rooms. Knowledge of the sound power level also allows the selection of appropriate noise reduction measures and building materials to ensure acoustic comfort in rooms.

Precise determination of the sound power level is only possible in an anechoic chamber or an anechoic chamber above a reflecting plane in accordance with the guidelines in ISO 3745:2012 [3]. The precise method for determining the sound power level is not possible under in situ conditions. In this case, the sound power level is usually determined using an engineering method [4] or survey method [5].

This paper presents the application of non-parametric statistical methods to determine the sound power level of sources when using the technical method. For this purpose, the bootstrap method [6] and Bayesian inference [7] were used, which allow the approximation of the distribution of a random

poziom mocy akustycznej jest podstawowym parametrem wykorzystywanym m.in. do modelowania hałasu środowiskowego [1], oceny ryzyka narażenia na hałas w miejscach pracy, porównywania maszyn i urządzeń [2] oraz w akustyce budowlanej, gdzie służy do oceny hałasu generowanego przez urządzenia, wyposażenie techniczne oraz instalacje. Na podstawie znajomości tego parametru dokonuje się także obliczeń wymaganej izolacyjności akustycznej przegród budowlanych w celu ograniczenia przenikania hałasu zewnętrznego do budynku oraz hałasu między pomieszczeniami. Znajomość poziomu mocy akustycznej pozwala również na dobór odpowiednich środków redukcji hałasu oraz materiałów budowlanych w celu zapewnienia komfortu akustycznego w pomieszczeniach.

Dokładne wyznaczenie poziomu mocy akustycznej możliwe jest jedynie w komorze bezchłowej lub w komorze bezchłowej nad płaszczyzną odbijającą dźwięk zgodnie z wytycznymi zawartymi w normie ISO 3745:2012 [3]. Metoda dokładna wyznaczania poziomu mocy akustycznej nie jest możliwa do zastosowania w warunkach in situ. W tym przypadku poziom mocy akustycznej zazwyczaj wyznaczany jest metodą techniczną [4] lub orientacyjną [5].

W artykule przedstawiono zastosowanie nieparametrycznych metod statystycznych do wyznaczania poziomu mocy akustycznej źródeł w przypadku użycia metody technicznej. W tym celu wykorzystano metodę bootstrap [6] i wnioskowanie bayesowskie [7], co pozwala na aproksymację rozkładu

¹⁾ AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie; bartlomiej.stepien@agh.edu.pl

variable without knowing the class of the distribution from which the sample is drawn, and can be applied even when the statistical sample size is limited.

Non-parametric statistical methods

Bootstrap method. In its non-parametric form, the bootstrap method [6] uses a Monte Carlo technique to n times sample with replacement from the elements of the original sample (analysed sample) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, where the probability of obtaining a given x_i for each element of the sample x is the same and is $1/n$, where n is the size of the original random sample [6].

For each bootstrap sample, the probability distribution parameter of the random variable X is estimated in the same way as for the original sample, and all bootstrap estimates of this parameter are then used to reconstruct the distribution of the estimator of the unknown parameter.

Each bootstrap sample $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ consists of the same number of observations as the parent sample and is used to estimate the value of the unknown parameter θ . The parameter θ can represent any moment of the distribution of the random variable X , or any other quantity describing the statistical characteristics of the random variable X .

According to the assumptions of the bootstrap method, the distribution of the estimator $\hat{\theta}$ can be approximated by the bootstrap estimator distribution $\hat{\theta}^*$ at fixed realisation values of the random variable X . The standard deviation, which is a measure of the variability of the estimator $\hat{\theta}$, can be estimated using the standard error of the bootstrap estimator $\hat{\theta}^*$ defined as [7]:

$$\hat{s}_B^* = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b^* - \bar{\hat{\theta}}_B^*)^2}{B-1}} \quad (1)$$

where:

B – number of bootstrap samples;

$\hat{\theta}_B^*$ – is the bootstrap estimate of the parameter θ .

When the Monte Carlo method is used to estimate the bootstrap distribution of the parameter θ , the mean value of the $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$ values, which are the values of the variable $\hat{\theta}^*$ obtained by generating the bootstrap sample values B times, is taken as the estimate of this parameter [7]. Thus, the estimate of the parameter θ is given by [7]:

$$\bar{\hat{\theta}}_B^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b^* \quad (2)$$

Furthermore, the bootstrap bias estimator is defined as follows [7]:

$$\hat{b}_B^* = \bar{\hat{\theta}}_B^* - \hat{\theta} \quad (3)$$

gdzie:

$\bar{\hat{\theta}}_B^*$ – the bootstrap estimate of the parameter θ ;

$\hat{\theta}$ – the estimate of the parameter θ .

The value of the estimate $\hat{\theta}$ can be determined either from the original sample (analysed sample) or from the population from which that sample was sampled (analysed sample) [7].

zmiennej losowej bez znajomości klasy rozkładu, z której pochodzi próba, oraz mogą być stosowane nawet w przypadku ograniczonego rozmiaru próby statystycznej.

Nieparametryczne metody statystyczne

Metoda bootstrap [6] w formie nieparametrycznej wykorzystuje technikę Monte Carlo do n -krotnego losowania ze zwracaniem elementów oryginalnej próby (analizowanej próby) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, przy czym prawdopodobieństwo uzyskania danego x_i dla wszystkich elementów próby x jest takie samo i wynosi $1/n$, gdzie n jest wymiarem oryginalnej próby losowej [6].

W przypadku każdej próby bootstrap estymowany jest parametr rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X w taki sam sposób, jak dla oryginalnej próby, a wszystkie estymaty bootstrap tego parametru służą do zrekonstruowania rozkładu estymatora nieznanego parametru.

Każda próba typu bootstrap $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ składa się z takiej samej liczby obserwacji jak próba macierzysta i jest wykorzystana do oceny wartości nieznanego parametru θ . Parametr θ może być dowolnym momentem rozkładu zmiennej losowej X lub inną wielkością opisującą statystyczne cechy zmiennej losowej X .

Zgodnie z założeniami metody bootstrap, rozkład estymatora $\hat{\theta}$ może być aproksymowany przy ustalonych wartościach realizacji zmiennej losowej X , rozkładem estymatora bootstrap $\hat{\theta}^*$. Odchylenie standardowe, będące miarą zmienności estymatora $\hat{\theta}$, może być oszacowane za pomocą błędu standardowego estymatora bootstrap $\hat{\theta}^*$ zdefiniowanego jako [7]:

$$\hat{s}_B^* = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b^* - \bar{\hat{\theta}}_B^*)^2}{B-1}} \quad (1)$$

gdzie:

B – liczba prób typu bootstrap;

$\hat{\theta}_B^*$ – estymata bootstrap parametru θ .

W przypadku zastosowania metody Monte Carlo do szacowania rozkładu bootstrap parametru θ , za oszacowanie tego parametru przyjmuje się wartość średnią z wartości $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$ będących wartościami zmiennej $\hat{\theta}^*$ uzyskanymi w wyniku B -krotnego generowania wartości próby bootstrap [7]. Tak więc oszacowanie parametru θ przyjmuje wartość [7]:

$$\bar{\hat{\theta}}_B^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b^* \quad (2)$$

Ponadto, estymata obciążenia typu bootstrap $\hat{b}_B^*$ estymatora jest definiowana jako [7]:

$$\hat{b}_B^* = \bar{\hat{\theta}}_B^* - \hat{\theta} \quad (3)$$

gdzie:

$\bar{\hat{\theta}}_B^*$ – estymata bootstrap parametru θ ;

$\hat{\theta}$ – estymata parametru θ .

Wartość estymaty $\hat{\theta}$ może zostać wyznaczona na podstawie oryginalnej próby (analizowanej próby) lub populacji, z której pochodzi oryginalna próba (analizowana próba) [7].

Bayesian inference. The essence of Bayesian estimation is the application of Bayes' theorem, extended to probability distributions of the form [8]:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int_{\Omega} p(x|\theta)p(\theta)d\theta} \quad (4)$$

where:

$p(\theta|x)$ – the *posterior* distribution of the parameter θ ;
 $p(x|\theta)$ – the sampling distribution of the parameter θ ;
 $p(\theta)$ – the *prior* distribution of the parameter θ ;
 Ω – parameters space.

Bayesian inference requires numerical methods to be used. In the research discussed here, the primary tool used to generate realisations from *posterior* distributions was the random walk Metropolis-Hastings method [9].

The random walk Metropolis-Hastings algorithm generates a Markov chain. The Bayesian estimate of the parameter θ is the expected value of the generated Markov chain, as determined by equation [9]:

$$\bar{\theta}^{BAY} = E[p(\theta|x)] = \frac{1}{N-S} \sum_{i=S+1}^N \theta_i^{BAY} \quad (5)$$

where:

θ_i^{BAY} – elements of the Markov chain derived from the *posterior* distribution;
 N – number of the Markov chain elements;
 S – number of the initial Markov chain elements.

From the generated Markov chain, the standard error of the Bayesian estimator can also be determined from equation [9]:

$$\hat{s}_{BAY} = \sqrt{\frac{1}{N-S} \sum_{i=S+1}^N (\theta_i^{BAY} - \bar{\theta}^{BAY})^2} \quad (6)$$

The bias estimate of the Bayesian estimator is given by the value of

$$\hat{b}_{BAY} = \bar{\theta}^{BAY} - \hat{\theta} \quad (7)$$

where:

$\bar{\theta}^{BAY}$ – the Bayesian estimate of the parameter θ ;
 $\hat{\theta}$ – the estimate of the parameter θ .

Research material

The suitability and effectiveness of the bootstrap method and Bayesian inference for determining the sound power level of sound sources in situ conditions were tested using real measurement data. The data used to demonstrate the proposed methods and perform the analyses comprised A-weighted sound pressure levels recorded around a reference sound source, B&K 4205. The sound power level of this sound source was determined using the engineering method [4]. The measurements were taken using the SVAN 959 sound level meter fitted with an SV preamplifier and a 1/2-inch free-field microphone GRAS 40AN. The A-weighted sound pressure levels recorded at each measurement point were corrected for background noise (Figure 1). The sound power level of the tested source was determined based on the data

Wnioskowanie bayesowskie. Istotą estymacji bayesowskiej jest zastosowanie twierdzenia Bayesa rozszerzonego na rozkłady prawdopodobieństwa w postaci [8]:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int_{\Omega} p(x|\theta)p(\theta)d\theta} \quad (4)$$

gdzie:

$p(\theta|x)$ – rozkład *a posteriori* parametru θ ;
 $p(x|\theta)$ – rozkład próbkowy parametru θ ;
 $p(\theta)$ – rozkład *a priori* parametru θ ;
 Ω – przestrzeń parametrów.

Wnioskowanie bayesowskie wymaga stosowania metod numerycznych. W omawianych badaniach jako podstawowe narzędzie do generowania realizacji z rozkładów *a posteriori* wykorzystano metodę błędzenia przypadkowego Metropolisa-Hastingsa [9].

Algorytm błędzenia przypadkowego Metropolisa-Hastingsa generuje łańcuch Markowa. Bayesowska estymata parametru θ jest wartością oczekiwaną wygenerowanego łańcucha Markowa, wyznaczoną na podstawie równania [9]:

$$\bar{\theta}^{BAY} = E[p(\theta|x)] = \frac{1}{N-S} \sum_{i=S+1}^N \theta_i^{BAY} \quad (5)$$

gdzie:

θ_i^{BAY} – elementy łańcucha Markowa pochodzącego z rozkładu *a posteriori*;
 N – liczba elementów łańcucha Markowa;
 S – liczba początkowych elementów łańcucha Markowa.

Na podstawie wygenerowanego łańcucha Markowa można wyznaczyć również błąd standardowy estymatora bayesowskiego na podstawie równania [9]:

$$\hat{s}_{BAY} = \sqrt{\frac{1}{N-S} \sum_{i=S+1}^N (\theta_i^{BAY} - \bar{\theta}^{BAY})^2} \quad (6)$$

Oszacowanie obciążenia estymatora bayesowskiego przyjmuje wartość

$$\hat{b}_{BAY} = \bar{\theta}^{BAY} - \hat{\theta} \quad (7)$$

gdzie:

$\bar{\theta}^{BAY}$ – bayesowska estymata parametru θ ;
 $\hat{\theta}$ – estymata parametru θ .

Materiał badawczy

Badanie przydatności i efektywności metody bootstrap i wnioskowania bayesowskiego do wyznaczania poziomu mocy akustycznej źródeł dźwięku w warunkach in situ przeprowadzono na rzeczywistych danych pomiarowych. Dane wykorzystane do zademonstrowania proponowanych metod oraz wykonania analiz stanowiły poziomy dźwięku A zarejestrowane wokół wzorcowego źródła dźwięku B&K 4205. Poziomą moc akustyczną tego źródła dźwięku wyznaczono metodą techniczną [4]. Pomiary wykonano miernikiem poziomu dźwięku SVAN 959 wyposażonym w przedwzmacniacz typu SV oraz 1/2" mikrofon pola swobodnego GRAS 40 AN. Poziomy dźwięku A zarejestrowane w każdym punkcie pomiarowym zostały skorygowane o poziom tła akustycznego (rysunek 1). Na podstawie tak przygotowanych danych wyznaczono po-

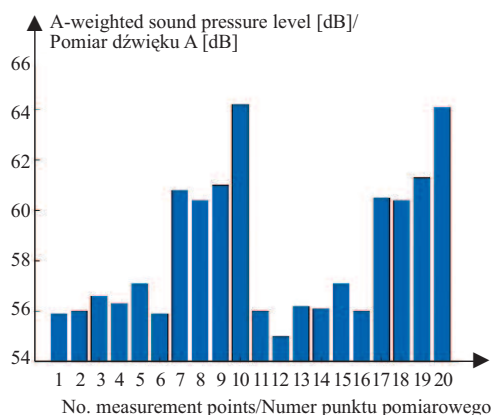


Fig. 1. The A-weighted sound level recorded at measuring points around the tested source

Rys. 1. Poziom dźwięku A zarejestrowany w punktach pomiarowych wokół badanego źródła



Research site

Stanowisko badawcze

prepared in this way. These data also constituted a test population of size $K = 20$, on the basis of which the sound power level was determined using the bootstrap method and Bayesian inference.

Sound pressure measurements were taken at 20 measurement points (photo) in order to determine the sound power level in accordance with ISO 3744:2010 [4]. The measurement surface was a hemisphere with a radius of $r = 2$ m placed above the asphalt surface. The sound power level L_{WA} was determined based on the recorded A-weighted sound pressure levels using the engineering method from equation [4]:

$$L_{WA} = \bar{L}_p - K_{1A} - K_{2A} + 10 \log \left(\frac{P_{pp}}{P_0} \right) + C_1 + C_2 \quad [dB] \quad (8)$$

where:

$\bar{L}_p$ – surface time-averaged A-weighted sound pressure level [dB];

$\bar{L}_p = 59,5$ dB;

K_{1A} – the background noise correction [dB];

$K_{1A} = 0,1$ dB;

K_{2A} – the environmental correction factor [dB]; $K_{2A} = 0,0$ dB;

$P_{pp} = 2\pi r^2$ – the area of the hemispherical measurement surface [m²];

$P_{pp} = 25,13$ m²;

$P_0 = 1$ m² – the area of the reference surface;

C_1 – the reference quantity correction; $C_1 = -0,3$ dB;

C_2 – the acoustics radiation impedance correction;

$C_2 = -0,5$ dB.

The A-weighted sound power level was determined using equation (8) to give a value of $L_{WA} = (72,6 \pm 2,4)$ dB for an expansion factor of $k = 2$. The expanded uncertainty was calculated in accordance with Annex H of ISO 3744 [4].

Simulation experiment

A simulation experiment was conducted to determine the minimum sample size n required to accurately estimate the expected value of the sound power level. The biases of the bootstrap and Bayesian estimators were analysed in relation to the sound power level determined by the precise method in an anechoic chamber above a sound-reflecting surface [3]. Non-parametric statistical tests were performed to check for

ziom mocy akustycznej badanego źródła. Dane te stanowiły również badaną populację o rozmiarze $K = 20$, na podstawie której wyznaczono poziom mocy akustycznej, wykorzystując metodę bootstrap i wnioskowanie bayesowskie.

Pomiary ciśnienia akustycznego wykorzystane do wyznaczenia poziomu mocy akustycznej zgodnie z normą ISO 3744:2010 [4] wykonano w 20 punktach pomiarowych (fotografia). Powierzchnię pomiarową stanowiła półsfera o promieniu $r = 2$ m umieszczona nad powierzchnią asfaltową. Na podstawie zarejestrowanych poziomów dźwięku A wartości

poziomu mocy akustycznej L_{WA} wyznaczono metodą techniczną z równania [4]:

$$L_{WA} = \bar{L}_p - K_{1A} - K_{2A} + 10 \log \left(\frac{P_{pp}}{P_0} \right) + C_1 + C_2 \quad (8)$$

gdzie:

$\bar{L}_p$ – powierzchniowy uśredniony w czasie poziom dźwięku A [dB];

$\bar{L}_p = 59,5$ dB;

K_{1A} – poprawka uwzględniająca hałas tła akustycznego [dB];

$K_{1A} = 0,1$ dB;

K_{2A} – poprawka środowiskowa; $K_{2A} = 0,0$ dB;

$P_{pp} = 2\pi r^2$ – pole półsferycznej powierzchni pomiarowej [m²];

$P_{pp} = 25,13$ m²;

$P_0 = 1$ m² – pole powierzchni odniesienia;

C_1 – poprawka wielkości odniesienia; $C_1 = -0,3$ dB;

C_2 – poprawka impedancji promieniowania; $C_2 = -0,5$ dB.

Wartość poziomu mocy akustycznej, skorygowanego charakterystyką częstotliwościową A, wyznaczono na podstawie równania (8), $L_{WA} = (72,6 \pm 2,4)$ dB, dla współczynnika rozszerzenia $k = 2$. Niepewność rozszerzoną wyznaczono zgodnie z Załącznikiem H normy ISO 3744 [4].

Eksperyment symulacyjny

Eksperyment symulacyjny przeprowadzono w celu wyznaczenia minimalnego rozmiaru próby pomiarowej n niezbędnej do oszacowania wartości oczekiwanej poziomu mocy akustycznej z wymaganą dokładnością. Analizie poddano również obciążenie estymatorów bootstrap i bayesowskiego w odniesieniu do poziomu mocy akustycznej wyznaczonego metodą dokładną w komorze bezchowej nad płaszczyzną odbijającą dźwięk [3]. W celu sprawdzenia, czy istnieją istotne statystycznie różnice w wartościach poziomu mocy akustycznej wyznaczonego z wykorzystaniem metody bootstrap i wnioskowania bayesowskiego w przypadku każdego rozmiaru próby pomiarowej n przeprowadzono nieparametryczne testy statystyczne.

Z badanej populacji wylosowano po tysiąc prób o rozmiarach $n = 2, 3, \dots, K$. Rozmiar próby n symuluje liczbę punktów pomiarowych wykorzystanych do wyznaczenia poziomu mocy akustycznej. Aby zminimalizować wpływ próby losowej na estymaty wartości poziomu mocy akustycznej, zarów-

statistically significant differences in the sound power level values determined using the bootstrap method and Bayesian inference for each sample size n .

A thousand samples of sizes $n = 2, 3, \dots, K$ were taken from the population under study. The sample size n represents the number of measurement points used to determine the sound power level. To minimise the impact of random sampling on the estimates of the sound power levels in both the bootstrap method and Bayesian inference, the values of this parameter were determined based on the same samples taken from the study population.

The probability distributions were reconstructed based on the same number of bootstrap replications $B = 10,000$ for each sample size n . As a result, 1,000 bootstrap distributions were obtained – each containing 10,000 elements – for each measurement sample of size n . The expected value of the sound power level was then determined for each of these bootstrap distributions. This algorithm produced 1,000-element probability distributions of the sound power level, which were then subjected to further statistical analysis.

The *posterior* distributions were reconstructed using an equal number of Markov chain elements $N = 110,000$ for each sample size n . The first $S = 10,000$ elements of these were treated as burn-in cycles and discarded. This resulted in 1,000 posterior distributions, each comprising 100,000 elements for each original sample size n . Based on these posterior distributions, Bayesian estimates of the expected value of the sound power level were determined. Implementing the presented algorithm resulted in the generation of 1,000-element probability distributions of the sound power level, which were then subjected to further statistical analysis.

In this experiment, a uniform distribution in the range from 63.2 dB to 83.2 dB was used as the prior distribution, while the sampling distribution $p(x|\theta)$ was determined using a kernel density estimator [10] based on a sample x of size n taken from a tested population.

Results and discussion

A non-parametric Kruskal-Wallis test was performed at a significance level of $\alpha = 0.05$ to determine whether the sound power level values obtained from samples of different sizes n were statistically different. Test probability values of $p = 8,75 \times 10^{-42}$ and $p = 2,14 \times 10^{-66}$ were obtained for the bootstrap method and Bayesian inference, respectively. As these values are much smaller than the assumed significance level, it is clear that there are statistically significant differences between the sound power level values.

Next, a Tukey-Kramer post-hoc multiple comparison test was performed to identify any statistically significant differences between the groups under comparison at an assumed significance level of $\alpha = 0.05$. Figure 2 shows a graphical presentation of the Tukey-Kramer test results. Statistically significant differences were found between the two mean sound power levels at the assumed significance level when the intervals were disjoint. However, when the intervals overlap, there are no statistically significant diffe-

no w metodzie bootstrap, jak i wnioskowaniu bayesowskim, wartości tego parametru zostały wyznaczone na podstawie tych samych prób wylosowanych z badanej populacji.

Rozkłady prawdopodobieństwa zostały zrekonstruowane na podstawie tej samej liczby replikacji prób typu bootstrap $B = 10000$ dla każdego rozmiaru próby n . W rezultacie otrzymano 1000 rozkładów bootstrap – każdy zawierający 10000 elementów – w przypadku każdej próby pomiarowej o rozmiarze n . Następnie rozkłady te zostały wykorzystane do wyznaczenia wartości oczekiwanej poziomu mocy akustycznej w przypadku każdego otrzymanego rozkładu bootstrap. W wyniku realizacji tego algorytmu, wyznaczono 1000-elementowe rozkłady prawdopodobieństwa poziomu mocy akustycznej, które następnie poddano dalszej analizie statystycznej.

Rozkłady prawdopodobieństwa *a posteriori* zrekonstruowano, wykorzystując jednakową liczbę elementów łańcucha Markowa $N = 110000$ dla każdego rozmiaru próby n , z których pierwsze $S = 10000$ elementów zostało potraktowane jako cykle spalone i zostały odrzucone. W ten sposób uzyskano 1000 rozkładów *a posteriori*, z których każdy miał rozmiar 100000 elementów dla każdego rozmiaru oryginalnej próby n . Na podstawie wygenerowanych rozkładów *a posteriori* wyznaczono bayesowskie estymaty wartości oczekiwanej poziomu mocy akustycznej. W wyniku realizacji przedstawionego algorytmu otrzymano 1000-elementowe rozkłady prawdopodobieństwa poziomu mocy akustycznej, które poddano dalszej analizie statystycznej.

W tym eksperymencie jako rozkład *a priori* wykorzystano rozkład jednostajny na przedziale 63,2 – 83,2 dB, natomiast rozkład próbkowy $p(x|\theta)$ został wyznaczony na podstawie wylosowanej próby x o rozmiarze n za pomocą jądrowego estymatora funkcji gęstości prawdopodobieństwa [10].

Wyniki i dyskusja

Wykonano nieparametryczny test Kruskala-Wallisa na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ w celu ustalenia, czy istnieją różnice istotne statystycznie w wartościach poziomu mocy akustycznej wyznaczonego na podstawie prób o różnych rozmiarach n . Uzyskano wartości prawdopodobieństwa testowego równe $p = 8,75 \times 10^{-42}$ i $p = 2,14 \times 10^{-66}$, odpowiednio dla metody bootstrap i wnioskowania bayesowskiego. Wartości te są dużo mniejsze od przyjętego poziomu istotności, co jednoznacznie wskazuje, że istnieją różnice istotne statystycznie między wartościami poziomu mocy akustycznej.

Następnie wykonano test post-hoc porównań wielokrotnych Tukeya-Kramera w celu identyfikacji, między którymi grupami występują różnice istotne statystycznie na przyjętym poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Graficzna prezentacja wyników testu Tukeya-Kramera została przedstawiona na rysunku 2. Pomiedzy dwiema porównywanymi ze sobą wartościami średnimi poziomu mocy akustycznej istnieją różnice istotne statystyczne na przyjętym poziomie istotności, gdy przedziały są rozłączne. W przypadku, gdy przedziały te nakładają się na siebie, wtedy nie występują różnice istotne statystycznie pomiędzy dwiema porównywanymi wartościami oczekiwanymi poziomu mocy akustycznej.

rences between the expected values of the sound power level.

The expected values of the bootstrap distributions of the sound power level obtained based on measurement samples of sizes $n = 2, 3$ and 4 (marked in red) differ statistically significantly from the sound power level obtained using five measurement points, while in the case of the remaining expected sound power level values (marked in dark grey), no statistically significant differences were found (Figure 2a).

The expected values of the posterior distributions of the sound power level, obtained from measurement samples of sizes $n = 2$ and 3 (marked in red), differ statistically significantly from the sound power level obtained from samples of size $n = 4$. No statistically significant differences were found for the remaining values (marked in dark grey) (Figure 2b).

The statistical analysis showed that in order to obtain sound power level values that do not differ significantly from the value of this parameter determined based on the results from 20 measurement points, the minimum sample size should be $n = 5$ for the bootstrap method and $n = 4$ for Bayesian inference.

The bias of non-parametric estimators of the expected sound power level was analysed in relation to the sound power level of the tested source, as determined by the precise method in an anechoic chamber above a sound-reflecting plane [3] ($L_{WA} = 72.0$ dB). The bias of the bootstrap estimator ranged from 0.41 dB ($n = 4$) to 0.58 dB ($n = 5$), with an average value of 0.51 dB. No dependence of the reduction in the bootstrap estimator bias on an increase in the measurement sample size n was found. From the sample size $n = 6$, the bias value fluctuated around the mean value with decreasing amplitude of changes as the measurement sample size increased. The bias of the Bayesian estimator ranged from 0.35 dB ($n = 3$) to 1.27 dB ($n = 2$), with an average value of 0.75 dB. From $n = 9$, a decrease in the value of this parameter was observed as the sample size increased.

The Kruskal-Wallis test was also performed to examine whether there were any statistically significant differences in the estimated sound power levels obtained using both non-parametric statistical methods based on samples of size n . The probability values (p-values) of the test are shown in the table.

The results of the Kruskal-Wallis test showed that, at the assumed significance level ($\alpha = 0.05$), there were no

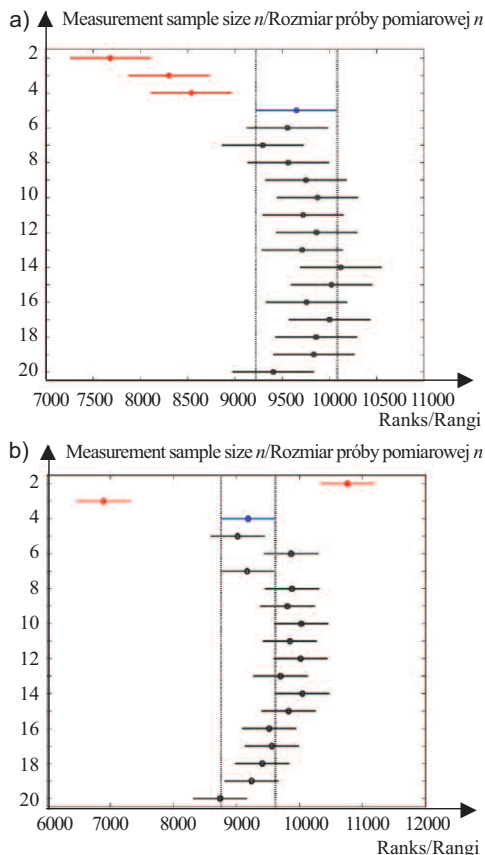


Fig. 2. Results of multiple comparison of the Tukey-Kramer test for: a) bootstrap method; b) Bayesian inference

Rys. 2. Wyniki testu porównań wielokrotnych Tukeya-Kramera w przypadku: a) metody bootstrap; b) wnioskowania bayesowskiego

Wartości oczekiwane rozkładów bootstrap poziomu mocy akustycznej uzyskane na podstawie prób pomiarowych o rozmiarach $n = 2, 3, 4$ (zaznaczone na czerwono) różnią się istotnie statystycznie od wartości poziomu mocy akustycznej uzyskanej przy wykorzystaniu pięciu punktów pomiarowych, natomiast w przypadku pozostałych wartości oczekiwanych poziomu mocy akustycznej (zaznaczone kolorem ciemnoszarym) nie stwierdzono różnic istotnych statystycznie (rysunek 2a).

Wartości oczekiwane rozkładów *a posteriori* poziomu mocy akustycznej uzyskane na podstawie prób pomiarowych o rozmiarach $n = 2, 3$ (zaznaczone na czerwono) różnią się istotnie statystycznie od wartości poziomu mocy akustycznej uzyskanej dla prób o rozmiarze $n = 4$. W przypadku pozostałych wartości (zaznaczone kolorem ciemnoszarym) nie stwierdzono różnic istotnych statystycznie (rysunek 2b).

Przeprowadzona analiza statystyczna wykazała, że aby uzyskać wartości poziomu mocy akustycznej nieróżniące się istotnie statystycznie od wartości tego parametru wyznaczonej na podstawie wyników z 20 punktów pomiarowych, minimalny rozmiar próby pomiarowej powinien wynosić $n = 5$ w przypadku metody bootstrap i $n = 4$ dla wnioskowania bayesowskiego.

Przeanalizowano również obciążenie nieparametrycznych estymatorów wartości oczekiwanej poziomu mocy akustycznej

w stosunku do wartości poziomu mocy akustycznej badanego źródła wyznaczonego metodą dokładną w komorze bezdechowej nad płaszczyzną odbijającą dźwięk [3] ($L_{WA} = 72.0$ dB). Wartość obciążenia estymatora bootstrap wynosiła od 0,41 dB ($n = 4$) do 0,58 dB ($n = 5$), natomiast wartość średnia 0,51 dB. Nie stwierdzono zależności zmniejszenia wartości obciążenia estymatora bootstrap wraz ze zwiększeniem rozmiaru próby pomiarowej n . Od rozmiaru próby $n = 6$ wartość obciążenia oscylowała wokół wartości średniej ze zmniejszającą się amplitudą zmian wraz ze zwiększeniem rozmiaru próby pomiarowej. Wartość obciążenia estymatora bayesowskiego przyjmowała wartości od 0,35 dB ($n = 3$) do 1,27 dB ($n = 2$), natomiast wartość średnia wyniosła 0,75 dB. Od rozmiaru próby pomiarowej $n = 9$ odnotowano zmniejszenie wartości tego parametru wraz ze zwiększeniem rozmiaru próby.

Wykonano również test Kruskala-Wallisa w celu zbadania, czy istnieją istotne statystycznie pomiędzy estymatami wartości oczekiwanej poziomu mocy akustycznej uzyskanymi w przypadku wykorzystania obu nieparametrycznych metod statystycznych na podstawie prób pomiarowych o rozmiarach n . Wartości prawdopodobieństwa testowego (p-value) przeprowadzonego testu zamieszczono w tabeli.

Wyniki przeprowadzonego testu Kruskala-Wallisa (tabela) wykazały, że nie stwierdzono różnic istotnych statystycznie, na

The probability value (p-value) of the Kruskal-Wallis test Prawdopodobieństwo testowe (p-value) testu Kruskala-Wallisa

n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10	n = 11
$9,29 \cdot 10^{-14}$	0,0008	0,0311	0,5677	$4,36 \cdot 10^{-5}$	0,0032	$1,55 \cdot 10^{-7}$	$2,65 \cdot 10^{-6}$	$4,39 \cdot 10^{-8}$	$1,12 \cdot 10^{-7}$
n = 12	n = 13	n = 14	n = 15	n = 16	n = 17	n = 18	n = 19	n = 20	
$5 \cdot 10^{-10}$	$2,51 \cdot 10^{-8}$	$8,93 \cdot 10^{-10}$	$1,30 \cdot 10^{-9}$	$4,29 \cdot 10^{-10}$	$3,40 \cdot 10^{-11}$	$3,91 \cdot 10^{-20}$	$1,24 \cdot 10^{-51}$	$3,04 \cdot 10^{-314}$	

statistically significant differences between the sound power level values obtained using the bootstrap method and Bayesian inference only for estimates obtained from samples of size $n = 5$. For all other sample sizes, however, the differences between the bootstrap and Bayesian estimates of the sound power level were statistically significant.

Summary and conclusions

■ The study determined the minimum sample size n required to estimate the expected value of the sound power level using the bootstrap method and Bayesian inference.

■ Statistical analysis showed that the minimum sample size required for estimating the sound power level is 5 elements for the bootstrap method and 4 elements for Bayesian inference.

■ The bias of non-parametric estimators was also determined in relation to the sound power level of this source, determined by the precise method. The average bias of the bootstrap estimator was 0.51 dB, compared to 0.75 dB for the Bayesian estimator.

■ It can be concluded that the sound power level values determined using the presented non-parametric methods differ significantly statistically for individual sample sizes.

■ The results of the research demonstrate that the presented methods can be used effectively not only to estimate sound power level, but also to determine other parameters within the broader field of acoustics.

The research leading to these results has received funding from the Polish Ministry of Science and Higher Education – project No. 16.16.130.942.

Received: 02.05.2025
Revised: 23.06.2025
Published: 21.08.2025

przyjętym poziomie istotności ($\alpha = 0,05$), między wartościami poziomu mocy akustycznej wyznaczonymi za pomocą metody bootstrap i wnioskowania bayesowskiego jedynie dla estymat uzyskanych na podstawie prób o rozmiarze $n = 5$. W przypadku pozostałych rozmiarów prób pomiarowych różnice między estymatami bootstrap i bayesowskimi poziomu mocy akustycznej różniły się istotnie statystycznie na założonym poziomie istotności.

Podsumowanie i wnioski

■ W badaniach wyznaczono minimalny rozmiar próby pomiarowej n wymagany do oszacowania wartości oczekiwanej poziomu mocy akustycznej, wykorzystując metodę bootstrap i wnioskowanie bayesowskie.

■ Analiza statystyczna wykazała, że minimalny rozmiar próby pomiarowej wymagany do oszacowania wartości poziomu mocy akustycznej powinien wynosić 5 elementów w przypadku metody bootstrap i 4 elementy – wnioskowania bayesowskiego.

■ Wyznaczono również obciążenie nieparametrycznych estymatorów w odniesieniu do poziomu mocy akustycznej tego źródła wyznaczonego metodą dokładną. Średnie obciążenie estymatora bootstrap wyniosło 0,51 dB, natomiast estymatora bayesowskiego 0,75 dB.

■ Można wnioskować, że w przypadku poszczególnych rozmiarów próby pomiarowej wartości poziomu mocy akustycznej, wyznaczone przy wykorzystaniu zaprezentowanych nieparametrycznych metod różnią się istotnie statystycznie.

■ Wyniki badań pokazują, że zaprezentowane metody można skutecznie stosować nie tylko do estymacji poziomu mocy akustycznej, ale także do wyznaczania innych parametrów w szeroko rozumianej akustyce.

Badania prowadzące do uzyskania powyższych wyników otrzymały dofinansowanie ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego – projekt nr 16.16.130.942.

Artykuł wpłynął do redakcji: 02.05.2025 r.
Otrzymano poprawiony po recenzjach: 23.06.2025 r.
Opublikowano: 21.08.2025 r.

Literature

- [1] Stepień B, Wszolek T, Mleczko D, Małecki P, Pawlik P, Kłaczyński M, Czapla M. Suitability analysis of selected methods for modelling infrasound and low-frequency noise from wind turbines. *Energies*. 2024; <https://doi.org/10.3390/en17122832>.
- [2] Fernandez MD, Recuero M, Blas JM. Definition of a labelling code for the noise emitted by machines. *Appl. Acoust.* 2008; <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2007.04.009>.
- [3] ISO 3745, 2012, Acoustics. Determination of sound power levels and sound energy levels of noise sources using sound pressure. Precision methods for anechoic rooms and hemi-anechoic rooms.
- [4] ISO 3744, 2010, Acoustics. Determination of sound power levels and sound energy levels of noise sources using sound pressure. Engineering methods for an essentially free field over a reflecting plane.

- [5] ISO 3746: 2010. Acoustics. Determination of sound power levels and sound energy levels of noise sources using sound pressure. Survey method using an enveloping measurement surface over a reflecting plane.
- [6] Efron B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Ann. Stat.* 1979; 7: 1-26.
- [7] Efron B, Tibshirani RJ. An introduction to the bootstrap. New York: Chapman & Hall/CRC. 1993.
- [8] Candy JV. Bayesian signal processing: classical, modern, and particle filtering methods. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc. 2009.
- [9] Gamerman D, Lopes HF. Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC; 2006.
- [10] Efromovich S. Nonparametric curve estimation: methods, theory, and applications. New York: Springer-Verlag. 1999.