

prof. dr hab. inż. Andrzej Kobryń¹⁾
ORCID: 0000-0002-4775-8164

Analysis of the possibilities of shaping road widenings using general transition curves

Analiza możliwości kształtowania poszerzeń jezdni za pomocą ogólnych krzywych przejściowych

DOI: 10.15199/33.2025.04.05

Abstract. The possibilities of shaping road widenings using general transition curves were examined. Two variants of a separate description of the road axis and each edge were analyzed, i.e. for identical and different values of tangent slopes at the beginning and end point of the curves. The calculation results confirmed the possibility of using a separate description of the road axis and edges using these curves. The second variant is more advantageous from the point of view of engineering practice.

Keywords: road design; road widening; spiral curve; general transition curve.

Streszczenie. Zbadano możliwości kształtowania poszerzeń jezdni za pomocą ogólnych krzywych przejściowych. Analizowano dwa warianty odrębnego opisu osi jezdni i każdej krawędzi, tzn. w przypadku jednakowych i różnych wartości nachylenia stycznych w początkowym i końcowym punkcie łuku, aby uzyskać określone wartości poszerzeń. Wyniki obliczeń potwierdziły możliwość stosowania odrębnego opisu osi i krawędzi jezdni za pomocą tych krzywych. Korzystniejszy, z punktu widzenia praktyki inżynierskiej, okazał się wariant drugi.

Słowa kluczowe: projekt drogi; poszerzenie jezdni; kłotoidea; ogólna krzywa przejściowa.

Various technical aspects related to road design in Poland are regulated by the Regulation of the Minister of Transport of 24 June 2022 on technical and construction regulations for roads [1]. According to the aforementioned regulation, seven classes of roads are distinguished, namely: motorways (A), expressways (S), main expressways (GP), main (G), collector roads (Z), local (L) and access roads (D). In shaping the curvilinear sections of roads, circular arcs and transition curves are used. According to § 17 of the aforementioned regulation, *the width of the lane on a circular arc in the plan should be increased to enable the passage of the authoritative vehicle while maintaining a safe distance between the passing vehicles (paragraph (5)). In addition, § 17 paragraph (6) states that the change in lane width is designed on a transition curve or transition straight in a smooth manner, without visible edge breaks. In difficult conditions, a different design of the change in lane width is permissible.*

The above provisions are detailed in the patterns and standards recommended by the Minister responsible for transport. In relation to the shaping of roadway widenings, this is document WR-D-22-2 [2], and specifically subchapter 4.4.2. It specifies the principles of designing roadway widenings in a situation where the value of the radius of the circular arc in the R plan is more than 25.00 m. The widening may be introduced along the length of the transition curve or transition straight. The change in the width of the roadway

óżne aspekty techniczne, związane z projektowaniem dróg w Polsce, reguluje Rozporządzenie Ministra Transportu z 24 czerwca 2022 r. w sprawie przepisów techniczno-budowlanych dotyczących dróg [1], zgodnie z którym wyróżnia się siedem klas dróg, a mianowicie: autostrady (A); drogi ekspresowe (S); główne ruchu przyspieszonego (GP); główne (G); zbiorcze (Z); lokalne (L) i dojazdowe (D). W kształtowaniu fragmentów krzywoliniowych dróg stosuje się łuki kołowe i krzywe przejściowe. W określonych sytuacjach, w obrębie łuków wymagane jest stosowanie poszerzenia jezdni. Zgodnie z § 17 wymienionego rozporządzenia, *szerokość pasa ruchu na łuku kołowym w planie powinna być zwiększona, aby umożliwić przejazd pojazdu miarodajnego z zachowaniem bezpiecznej odległości między wymijającymi się pojazdami (akapit 5). Ponadto, § 17 akapit 6 stanowi, że zmianę szerokości pasa ruchu projektuje się na krzywej przejściowej lub prostej przejściowej w sposób płynny, bez widocznych załamania krawędzi. W trudnych warunkach dopuszcza się inne zaprojektowanie zmiany szerokości pasa ruchu.*

Uszczegółowienie tych zapisów zawierają wzorce i standardy rekomendowane przez ministra właściwego ds. transportu. W odniesieniu do kształtowania poszerzeń jezdni jest to dokument WR-D-22-2 [2], a konkretnie podrozdział 4.4.2. Określono tam zasady projektowania poszerzeń jezdni w sytuacji, gdy wartość promienia łuku kołowego w planie R wynosi więcej niż 25,00 m. Poszerzenie może być wprowadzane na długości krzywej przejściowej lub prostej przejściowej. Zmiana szerokości jezdni powinna być płynna, bez widocznych załamania jej krawędzi. W związku z tym zaleca się odrębne kształtowanie krawędzi jezdni

¹⁾ Politechnika Białostocka, Wydział Budownictwa i Nauk o Środowisku; a.kobryn@pb.edu.pl

should be smooth, without visible bends in its edges. Therefore, it is recommended to shape the edges of the roadway separately using transition curves with appropriate parameters. The transition curve that currently dominates in design practice is the clothoid. This is due to the availability of various road design programs in which it has been implemented as a transition curve. The use of the clothoid in shaping roadway widenings involves the separate selection of parameter A for each edge, and then – introducing a fragment of the clothoid with the selected parameter into the design.

As mentioned, in the tradition of road design, the most common transition curve is the clothoid. The methods of its use for shaping the carriageway widening are described in various literature sources (e.g. [3, 4, 5, 6, 7]). Various solutions of transition curves are known from the literature. Among them, the so-called general transition curves deserve attention, which describe the entire curvilinear transition between two straight lines with a single equation [8, 9]. Within the general transition curves, the curvature increases from zero at the starting point to a specified maximum value, and then decreases again to zero at the end point. The works [4] and [9] contain their detailed mathematical description and geometric characteristics.

The aim of this article is to verify the possibilities of shaping roadway widenings using general transition curves. Therefore, the related methodology is proposed below, as well as the results of numerical studies that were performed with the aim of formulating appropriate practical recommendations.

Analyzed solutions of general transition curves

I will analyze general transition curves described by an explicit function. The appropriate solutions of such curves are presented in [4] and [9]. Among them, one can distinguish curves with a smooth or non-smooth curvature graph. In my opinion, the general curves presented in [9] can be of particular use in shaping of road widenings.

The curve with a smooth curvature graph is described by equation (1) [9]:

$$y = x_K(G_1 \tan u_p + G_2 \tan u_K) \quad (1)$$

where:

$$\begin{aligned} G_1 &= t - 20t^4 + 45t^5 - 36t^6 + 10t^7 \\ G_2 &= -15t^4 + 39t^5 - 34t^6 + 10t^7 \end{aligned}$$

x_K – abscissa of the end point;

u_p, u_K – inclination angles of tangents at points P and K (Figure 1);

$t = x/x_K, t \in (0; 1)$.

Between points P and K with zero curvature there is only one curvature maximum. According to [9], it occurs at point E with abscissa $x_E \in \left(\frac{4}{10}x_K; \frac{6}{10}x_K\right)$. A necessary condition for this is

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{\tan u_p}{\tan u_K} \leq -\frac{3}{4} \quad (2)$$

przez krzywe przejściowe o odpowiednich parametrach. Krzywą przejściową, która obecnie dominuje w praktyce projektowej, jest kłotoida. Wynika to z dostępności różnych programów do projektowania dróg, w których została ona zaimplementowana jako krzywa przejściowa. Zastosowanie kłotoidy w kształtowaniu poszerzeń jezdni polega na odrębnym doborze parametru A każdej krawędzi, a następnie na wprowadzeniu do projektu fragmentu kłotoidy o dobranym parametrze.

Jak wspomniano, w tradycji projektowania dróg, **najbardziej rozpowszechnioną krzywą przejściową jest kłotoida**, ale dopuszcza się również stosowanie innych krzywych przejściowych. Sposoby użycia kłotoidy do kształtowania poszerzenia jezdni są opisane w różnych źródłach literaturowych, np. [3, 4, 5, 6, 7]. Z literatury znane są też inne rozwiązania krzywych przejściowych. Wśród nich na uwagę zasługują tzw. ogólne krzywe przejściowe, które za pomocą jednego równania opisują całe przejście krzywoliniowe między dwiema prostymi [8, 9]. W obrębie ogólnych krzywych przejściowych krzywizna rośnie od zera w punkcie początkowym do określonej wartości maksymalnej, po czym ponownie maleje do zera w punkcie końcowym. Prace [4] i [9] zawierają ich szczegółowy opis matematyczny i charakterystykę geometryczną.

Celem artykułu jest weryfikacja możliwości kształtowania poszerzeń jezdni z użyciem ogólnych krzywych przejściowych. W związku z tym zaproponowano związaną z tym metodę postępowania oraz przedstawiono wyniki badań numerycznych, jakie wykonano z myślą o sformułowaniu odpowiednich zaleceń praktycznych.

Analizowane rozwiązania ogólnych krzywych przejściowych

Przeanalizuję ogólne krzywe przejściowe opisane za pomocą funkcji jawnej $y = f(x)$. Odpowiednie rozwiązania takich krzywych zostały przedstawione w [4] i [9]. Wśród nich można wyróżnić krzywe z gładkim lub niegładkim wykresem krzywizny. Moim zdaniem, szczególną przydatność w kształtowaniu poszerzeń jezdni mogą mieć ogólne krzywe przedstawione w [9].

Krzywa z gładkim wykresem krzywizny jest opisana równaniem (1) [9]:

$$y = x_K(G_1 \tan u_p + G_2 \tan u_K) \quad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} G_1 &= t - 20t^4 + 45t^5 - 36t^6 + 10t^7 \\ G_2 &= -15t^4 + 39t^5 - 34t^6 + 10t^7 \end{aligned}$$

x_K – odcięta punktu końcowego;

u_p, u_K – kąty pochylenia stycznych w punktach P i K (rysunek 1);

$t = x/x_K, t \in (0; 1)$.

Miedzy punktami P i K o krzywiznie zerowej istnieje tylko jedno maksimum krzywizny. Zgodnie z [9], występuje ono w punkcie E o odciętej $x_E \in \left(\frac{4}{10}x_K; \frac{6}{10}x_K\right)$. Warunkiem koniecznym jest:

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{\tan u_p}{\tan u_K} \leq -\frac{3}{4} \quad (2)$$

In turn, the curve with a non-smooth curvature graph is described by equation (3) [9]:

$$y = x_K(M_1 \tan u_p + M_2 \tan u_K) \quad (3)$$

where:

$$M_1 = t - 6t^3 + 8t^4 - 3t^5$$

$$M_2 = -4t^3 + 7t^4 - 3t^5$$

The condition for the existence of only one curvature maximum within the entire curve has the form:

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{\tan u_p}{\tan u_K} \leq -\frac{2}{3} \quad (4)$$

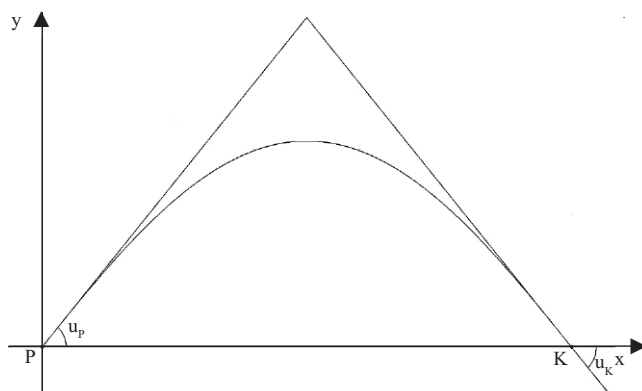


Fig. 1. General transition curve in rectangular coordinate system
Rys. 1. Ogólna krzywa przejściowa w układzie współrzędnych prostokątnych

This corresponds to the range of the abscissa $x_E \in \left\langle \frac{1}{3}x_K; \frac{2}{3}x_K \right\rangle$.

Odpowiada to zakresowi odciętej niżej $x_E \in \left\langle \frac{1}{3}x_K; \frac{2}{3}x_K \right\rangle$.

General transition curves with a symmetric distribution of the curvature

Traditional geometric systems used in the shaping of curvilinear road sections can have a symmetrical or asymmetrical distribution of curvature relative to the center of the curve. Symmetrical systems are more often used. Therefore, general transition curves with a symmetrical distribution of curvature will be considered in further analyses. The maximum curvature should therefore take place for $t = 1/2$. A necessary condition for this is $\tan u_p = \tan u_K = \tan u$. In this case, the equation (1) will take the form:

$$y = x_K G \cdot \tan u \quad (5)$$

where:

$$G = t - 5t^4 + 6t^5 - 2t^6$$

Based on equation (3) we get:

$$y = x_K M \cdot \tan u \quad (6)$$

where:

$$M = t - 2t^3 + t^4$$

In further analyses I will use the known formula describing the curvature:

$$k(x) = \frac{1}{r} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (7)$$

where the derivatives y' and y'' in the case of equations (5) and (6) have the form given in Table 1. The minimum radius of curvature at the midpoint of the curve, i.e. for $t = 1/2$, will be denoted as R_K . Based on (7), we can write for curves (5) and (6) respectively:

$$\frac{1}{R_E^{(5)}} = \frac{1}{x_K} |G''(t = 1/2)| \tan u \quad (8)$$

and

$$\frac{1}{R_E^{(6)}} = \frac{1}{x_K} |M''(t = 1/2)| \tan u \quad (9)$$

Z kolei, krzywa z niegładkim wykresem krzywizny jest opisana równaniem (3) [9]:

$$y = x_K(M_1 \tan u_p + M_2 \tan u_K) \quad (3)$$

gdzie:

$$M_1 = t - 6t^3 + 8t^4 - 3t^5$$

$$M_2 = -4t^3 + 7t^4 - 3t^5$$

Warunek istnienia tylko jednego maksimum krzywizny w obrębie całej krzywej ma postać:

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{\tan u_p}{\tan u_K} \leq -\frac{2}{3} \quad (4)$$

Ogólne krzywe przejściowe z symetrycznym rozkładem krzywizny

Tradycyjne układy geometryczne stosowane w kształtowaniu krzywoliniowych fragmentów dróg mogą mieć symetryczny lub niesymetryczny rozkład krzywizny względem środka łuku. Częściej stosowane są układy symetryczne. W dalszych analizach będą więc rozpatrywane ogólne krzywe przejściowe z symetrycznym rozkładem krzywizny. Maksimum krzywizny powinno więc mieć miejsce w przypadku $t = 1/2$. Niezbędnym warunkiem na to jest $\tan u_p = \tan u_K = \tan u$. W tym przypadku równanie (1) przyjmie postać:

$$y = x_K G \cdot \tan u \quad (5)$$

gdzie:

$$G = t - 5t^4 + 6t^5 - 2t^6$$

Na podstawie równania (3) otrzymamy:

$$y = x_K M \cdot \tan u \quad (6)$$

gdzie:

$$M = t - 2t^3 + t^4$$

W dalszych analizach zastosuję znany wzór opisujący krzywiznę:

$$k(x) = \frac{1}{r} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (7)$$

przy czym pochodne y' i y'' w przypadku równań (5) i (6) mają postać podaną w tabeli 1. Minimalny promień krzywizny w środkowym punkcie łuku, czyli w przypadku $t = 1/2$, oznaczamy jako R_K . Na podstawie (7) można więc w przypadku krzywych (5) i (6) zapisać odpowiednio:

$$\frac{1}{R_E^{(5)}} = \frac{1}{x_K} |G''(t = 1/2)| \tan u \quad (8)$$

oraz

$$\frac{1}{R_E^{(6)}} = \frac{1}{x_K} |M''(t = 1/2)| \tan u \quad (9)$$

Table 1. Derivatives of functions (5) and (6)

Tabela 1. Pochodne funkcji (5) i (6)

Function/Funkcja	Derivatives/Pochodne
(5)	$y' = G' \tan u$ wherein $G' = 1 - 20t^2 + 30t^4 - 12t^6/y' = G' \tan u$ przy czym $G' = 1 - 20t^2 + 30t^4 - 12t^6$ $y'' = \frac{1}{x_K} G'' \tan u$ wherein $G'' = -60t^2 + 120t^3 - 60t^4/y'' = \frac{1}{x_K} G'' \tan u$ przy czym $G'' = -60t^2 + 120t^3 - 60t^4$
(6)	$y' = M' \tan u$ wherein $M' = 1 - 6t^2 + 4t^3/y' = M' \tan u$ przy czym $M' = 1 - 6t^2 + 4t^3$ $y'' = \frac{1}{x_K} M'' \tan u$ wherein $M'' = -12t + 12t^2/y'' = \frac{1}{x_K} M'' \tan u$ przy czym $M'' = -12t + 12t^2$

Since $|G''(t = 1/2)| = 15/4$ and $|M''(t = 1/2)| = 3$, we get

$$R_E^{(5)} = \frac{4}{15} x_K \frac{1}{\tan u} \quad (10)$$

and

$$R_E^{(6)} = \frac{1}{3} x_K \frac{1}{\tan u} \quad (11)$$

From (5) and (6) the ordinate y_E of the point E also follows for $t = 1/2$:

$$y_E^{(5)} = \frac{11}{32} x_K \tan u \quad (12)$$

and

$$y_E^{(6)} = \frac{5}{16} x_K \tan u \quad (13)$$

W związku z tym, że $|G''(t = 1/2)| = 15/4$ oraz $|M''(t = 1/2)| = 3$, więc otrzymamy

$$R_E^{(5)} = \frac{4}{15} x_K \frac{1}{\tan u} \quad (10)$$

oraz

$$R_E^{(6)} = \frac{1}{3} x_K \frac{1}{\tan u} \quad (11)$$

Na podstawie (5) i (6), przy $t = 1/2$ wynika, że rzędna y_E punktu E:

$$y_E^{(5)} = \frac{11}{32} x_K \tan u \quad (12)$$

oraz

$$y_E^{(6)} = \frac{5}{16} x_K \tan u \quad (13)$$

Methodology for shaping of road widenings using general transition curves

In the case of shaping roadway widenings using a clothoid, a separate mathematical description of both the roadway axis and both edges is possible. In the case of using general transition curves to shape roadway widenings on curves, problems may occur with maintaining the same roadway width on both sides of the axis if the staking out were based on a separate description of each edge using the appropriate general transition curve. Therefore, below we will consider changes in the roadway width when using this method of routing. The roadway widening will be introduced gradually until the designed widening value is achieved, which will take place in the middle of the arc length of the general transition curve. We will consider the problem in relation to two variants of the edge description, which are presented in Figures 2 and 3.

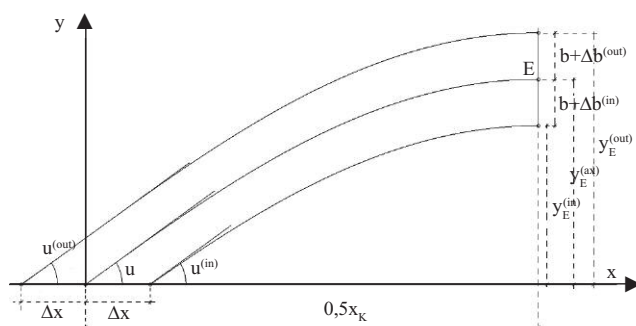


Fig. 2. The first variant of shaping the road widening (I)
Rys. 2. Pierwszy wariant kształtowania poszerzeń jezdni (I)

Metoda kształtowania poszerzeń jezdni z użyciem ogólnych krzywych przejściowych

W przypadku kształtowania poszerzeń jezdni z użyciem kłoidy możliwy jest osobny opis matematyczny zarówno osi jezdni, jak też obu krawędzi, natomiast w przypadku użycia ogólnych krzywych przejściowych, do kształtowania poszerzeń jezdni na łukach, mogą wystąpić problemy z zachowaniem jednakowej szerokości jezdni po obu stronach osi, jeśli tyczenie bazowałoby na odrębnym opisie każdej krawędzi za pomocą odpowiedniej ogólnej krzywej przejściowej. W związku z tym, omówię zmiany szerokości jezdni przy stosowaniu takiego sposobu trasowania. Poszerzenie jezdni będzie wprowadzane stopniowo aż do osiągnięcia projektowanej wartości poszerzenia, co nastąpi w środku długości łuku ogólnej krzywej przejściowej. Problem rozpatrzę w odniesieniu do dwóch wariantów opisu krawędzi, przedstawionych na rysunkach 2 i 3.

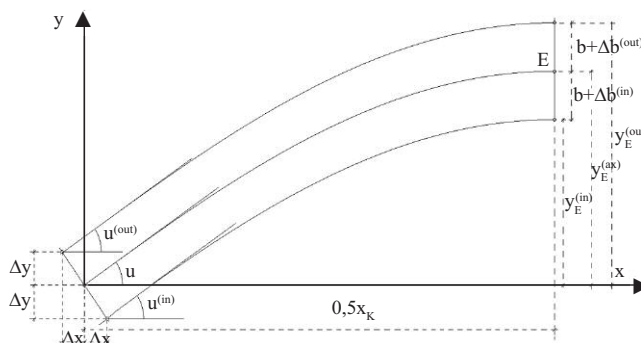


Fig. 3. The second variant of shaping the road widening (II)
Rys. 3. Drugi wariant kształtowania poszerzeń jezdni (II)

In the first variant (Figure 2) it is assumed that the origins of the local coordinate systems for the left and right edges lie on the abscissa axis of the local coordinate system of the curve describing the road axis. In the second variant (Figure 3) we will assume that the origins of the local coordinate systems for the left and right edges lie in the direction perpendicular to the tangent at the starting point of the axial curve and are at a distance b from the beginning of the axial curve.

As mentioned at the beginning of this subsection, the roadway will be widened gradually until the designed width is achieved. The largest increase in the roadway width, i.e. the maximum change in the roadway width, will occur at the midpoint of the arc (E). Before determining the size of this change, equations (12) and (13) were written in a generalized form:

$$y_E = Cx_K \tan u \quad (14)$$

where $C = 11/32$ for curves (5) and $C = 5/16$ for curves (6).

The ordinate of the inner and outer edges in the middle of the arc will be:

$$y_E^{(in)} = C(x_K - 2 \cdot \Delta x) \tan u \quad (15)$$

and

$$y_E^{(out)} = C(x_K + 2 \cdot \Delta x) \tan u \quad (16)$$

where: $\Delta x = b/\sin u$ in the first variant and $\Delta x = b \sin u$ in the second variant (u – angle of inclination of the initial tangent to the axial curve).

First variant of edge routing. In the first variant of applying local coordinate systems for the inner and outer edges, the following equations are satisfied for the inner and outer lanes (Figure 2):

$$y_E^{(ax)} - y_E^{(in)} = b + \Delta b^{(in)} \quad (17)$$

and

$$y_E^{(out)} - y_E^{(ax)} = b + \Delta b^{(out)} \quad (18)$$

where:

$y_E^{(ax)}$ – the ordinate of the center of the arc of the axial curve, expressed by equation (14);

$\Delta b^{(in)}, \Delta b^{(out)}$ – changes in the width of the inner outer lanes.

Taking into account (14), (15) and (16), on the basis of (17) and (18) it was concluded that:

$$\Delta b^{(in)} = \Delta b^{(out)} = \Delta b = b \left(2C \cdot \frac{1}{\cos u} - 1 \right) \quad (19)$$

The values of Δb resulting from equation (19) for $b = 3.50$ m and $b = 3.00$ m are listed in Table 2.

As can be seen, in the case of angles $u < 50^\circ$ for curves (5) and $u < 60^\circ$ for curves (6) negative values of Δb are obtained. This means that in the middle of the arc the width of the roadway would be smaller than at the extreme points, which is of course out of the question. Relatively large values of Δb for the angle $u < 70^\circ$ practically exclude such a method of routing the edges of the road. Only for $u = 50^\circ$ in the case of curves (5) and $u = 60^\circ$ in the case of curves (6) are values obtained that are close to the values of widenings used in practice.

I will now consider another way of routing the road edges. In order to maintain a specific value of the roadway widening

W wariancie pierwszym (rysunek 2) założono, że początek lokalnych układów współrzędnych w przypadku lewej i prawej krawędzi leży na osi odciętych lokalnego układu współrzędnych krzywej opisującej oś drogi, natomiast w wariancie drugim (rysunek 3), że leży on na kierunku prostopadłym do stycznej w punkcie początkowym krzywej osiowej i są odległe o odcinek b od początku krzywej osiowej.

Jak już wspomniano, poszerzenie jezdni będzie wprowadzane stopniowo aż do osiągnięcia projektowanej wartości. Maksymalna zmiana szerokości jezdni wystąpi w punkcie środkowym łuku (E). Przed określeniem wielkości tej zmiany, równania (12) i (13) zapisano w postaci uogólnionej:

$$y_E = Cx_K \tan u \quad (14)$$

przy czym: $C = 11/32$ w przypadku krzywych (5) oraz $C = 5/16$ w przypadku krzywych (6).

Rzędna krawędzi wewnętrznej i zewnętrznej w środku łuku wyniesie odpowiednio:

$$y_E^{(in)} = C(x_K - 2 \cdot \Delta x) \tan u \quad (15)$$

oraz

$$y_E^{(out)} = C(x_K + 2 \cdot \Delta x) \tan u \quad (16)$$

przy czym: $\Delta x = b/\sin u$ w pierwszym wariancie oraz $\Delta x = b \sin u$ w drugim wariancie (u – kąt pochylenia stycznej początkowej do krzywej osiowej).

Pierwszy wariant trasowania krawędzi. W pierwszym wariancie przyłożenia lokalnych układów współrzędnych do krawędzi wewnętrznej i zewnętrznej są spełnione następujące równania w odniesieniu do pasa wewnętrznego i zewnętrznego (rysunek 2):

$$y_E^{(ax)} - y_E^{(in)} = b + \Delta b^{(in)} \quad (17)$$

oraz

$$y_E^{(out)} - y_E^{(ax)} = b + \Delta b^{(out)} \quad (18)$$

gdzie:

$y_E^{(ax)}$ – rzędna środka łuku krzywej osiowej, wyrażona za pomocą równania (14);

$\Delta b^{(in)}, \Delta b^{(out)}$ – zmiana szerokości wewnętrznego i zewnętrznego pasa ruchu.

Uwzględniając (14), (15) i (16), na podstawie (17) i (18) stwierdzono, że:

$$\Delta b^{(in)} = \Delta b^{(out)} = \Delta b = b \left(2C \cdot \frac{1}{\cos u} - 1 \right) \quad (19)$$

Wartości Δb wynikające z równania (19) przy $b = 3,50$ m oraz $b = 3,00$ m zestawiono w tabeli 2.

Jak widać, w przypadku kątów $u < 50^\circ$ dla krzywych (5) i $u < 60^\circ$ dla krzywych (6) otrzymuje się ujemne wartości Δb . Oznacza to, że w środku łuku szerokość jezdni byłaby mniejsza niż w punktach skrajnych, co oczywiście nie wchodzi w grę. Relatywnie duże wartości Δb dla kąta $u < 70^\circ$ praktycznie wykluczają taki sposób trasowania krawędzi jezdni. Jedynie dla $u = 50^\circ$ w przypadku krzywych (5) i $u = 60^\circ$ w przypadku krzywych (6) uzyskuje się wartości zbliżone do wartości poszerzeń stosowanych w praktyce.

Rozpatrzę teraz inny sposób trasowania krawędzi. W celu zachowania określonej wartości poszerzenia jezdni w środku

in the middle of the curve, we will investigate the possibility of routing the inner and outer edges assuming $\tan u^{(in)} \neq \tan u^{(out)} \neq \tan u$. For the inner and outer curves, I will then write the following equations:

$$y_E^{(in)} = C(x_K - 2 \cdot \Delta x) \tan u^{(in)} \quad (20)$$

and

$$y_E^{(out)} = C(x_K + 2 \cdot \Delta x) \tan u^{(out)} \quad (21)$$

Based on (17) and (20):

$$\tan u^{(in)} = \frac{Cx_K \tan u - b - \Delta b^{(in)}}{C\left(x_K - 2 \frac{b}{\sin u}\right)} \quad (22)$$

From (18) and (20) it follows:

$$\tan u^{(out)} = \frac{Cx_K \tan u + b + \Delta b^{(out)}}{C\left(x_K + 2 \frac{b}{\sin u}\right)} \quad (23)$$

The values $u^{(in)}$ and $u^{(out)}$ calculated on the basis of (22) and (23) are given in Tables 3 and 4. In this case, the aim is for the inclinations of the tangents to the axis and both edges to be approximately the same. Otherwise, there could be an optical illusion of discontinuity of the lines describing the edges of the road. The values given in Table 3 show that the differences $\Delta u = u^{(in)} - u$ or $\Delta u = u^{(out)} - u$ do not exceed $0,5^\circ$ for angles u smaller than $30 - 40^\circ$.

Second variant of edge routing. Based on Figure 3, the following initial equations can be written:

$$\Delta y + y_E^{(ax)} - y_E^{(in)} = b + \Delta b^{(in)} \quad (24)$$

and

$$\Delta y + y_E^{(out)} - y_E^{(ax)} = b + \Delta b^{(out)} \quad (25)$$

where $\Delta y = b \cos u$. Taking into account (14), (15) and (16), based on (24) and (25) we conclude that:

$$\Delta b^{(in)} = \Delta b^{(out)} = \Delta b = b \left(2C \cdot \frac{\sin^2 u}{\cos u} - 1 + \cos u \right) \quad (26)$$

The values Δb resulting from equation (26) for $b = 3,50$ m and $b = 3,00$ m are given in Table 2. Based on these values, it can be concluded that this method of edge routing is more advantageous than in variant I. For individual angles u the appropriate widening values Δb can be determined for curves (5) or (6) and finally it can be assessed whether they are acceptable from a practical point of view.

Similarly to variant I, also in variant II we will consider the possibility of routing the inner and outer edges assuming $\tan u^{(in)} \neq \tan u^{(out)} \neq \tan u$. For the inner and outer curves we will use equations (20) and (21), but this time $\Delta x = b \sin u$. Based on (24) and (20) we get:

$$\tan u^{(in)} = \frac{Cx_K \tan u + b \cos u - b - \Delta b^{(in)}}{C(x_K - 2b \sin u)} \quad (27)$$

Table 2. Widening values in variants I and II

Tabela 2. Wartości poszerzeń w wariantach I i II

Curve/ Krzywa	Angle u [°]/ Kąt u [°]	Variant I/Wariant I		Variant II/Wariant II	
		value Δb [m] for lane width of/ wartość Δb [m] w przypadku pasa o szerokości:			
		b = 3,50 [m]	b = 3,00 [m]	b = 3,50 [m]	b = 3,00 [m]
(5)	10	-1,06	-0,91	0,02	0,02
	20	-0,94	-0,81	0,09	0,08
	30	-0,72	-0,62	0,23	0,19
	40	-0,36	-0,31	0,48	0,41
	50	0,24	0,21	0,95	0,81
	60	1,31	1,13	1,86	1,59
	70	3,54	3,03	3,91	3,35
(6)	10	-1,28	-1,10	0,01	0,01
	20	-1,17	-1,00	0,06	0,05
	30	-0,97	-0,83	0,16	0,14
	40	-0,64	-0,55	0,36	0,31
	50	-1,10	-0,08	0,75	0,64
	60	0,88	0,75	1,53	1,31
	70	2,90	2,48	3,34	2,87

łuku, zbadam możliwość trasowania wewnętrznej i zewnętrznej krawędzi przy założeniu $\tan u^{(in)} \neq \tan u^{(out)} \neq \tan u$. W przypadku krzywej wewnętrznej i zewnętrznej zapiszę wtedy następujące równania:

$$y_E^{(in)} = C(x_K - 2 \cdot \Delta x) \tan u^{(in)} \quad (20)$$

oraz

$$y_E^{(out)} = C(x_K + 2 \cdot \Delta x) \tan u^{(out)} \quad (21)$$

Na podstawie (17) i (20):

$$\tan u^{(in)} = \frac{Cx_K \tan u - b - \Delta b^{(in)}}{C\left(x_K - 2 \frac{b}{\sin u}\right)} \quad (22)$$

Z (18) i (20) wynika:

$$\tan u^{(out)} = \frac{Cx_K \tan u + b + \Delta b^{(out)}}{C\left(x_K + 2 \frac{b}{\sin u}\right)} \quad (23)$$

Wartości $u^{(in)}$ i $u^{(out)}$ obliczone na podstawie (22) i (23) zawierają tabele 3 i 4. W tym przypadku chodzi o to, aby pochylenie stycznych do osi i obu krawędzi było mniej więcej jednakowe. W przeciwnym razie mogłoby wystąpić optyczne złudzenie nieciągłości linii opisujących krawędzie jezdni. Z wartości podanych w tabeli 3 wynika, że różnica $\Delta u = u^{(in)} - u$ lub $\Delta u = u^{(out)} - u$ nie przekracza $0,5^\circ$ w przypadku kątów u mniejszych niż $30 - 40^\circ$.

Drugi wariant trasowania krawędzi. Na podstawie rysunku 3 można zapisać następujące równania wyjściowe:

$$\Delta y + y_E^{(ax)} - y_E^{(in)} = b + \Delta b^{(in)} \quad (24)$$

oraz

$$\Delta y + y_E^{(out)} - y_E^{(ax)} = b + \Delta b^{(out)} \quad (25)$$

przy czym $\Delta y = b \cos u$. Uwzględniając (14), (15) i (16), na podstawie (24) i (25) stwierdzimy, że:

$$\Delta b^{(in)} = \Delta b^{(out)} = \Delta b = b \left(2C \cdot \frac{\sin^2 u}{\cos u} - 1 + \cos u \right) \quad (26)$$

Wartości Δb , wynikające z równania (26) przy $b = 3,50$ m i $b = 3,00$ m, zamieszczono w tabeli 2. Na ich podstawie stwierdzono, że ten sposób trasowania krawędzi jest korzystniejszy niż w wariantie I. W przypadku poszczególnych kątów u można określić odpowiednie wartości poszerzenia Δb odnoszące się do krzywych (5) lub (6) i ostatecznie ocenić, czy są one do zaakceptowania z praktycznego punktu widzenia.

Podobnie jak w wariantie I, również w II wariantie rozpatrzyć ewentualność trasowania wewnętrznej i zewnętrznej krawędzi przy założeniu $\tan u^{(in)} \neq \tan u^{(out)} \neq \tan u$. W przypadku krzywej wewnętrznej i zewnętrznej wykorzystam równania (20) i (21), przy czym tym razem $\Delta x = b \sin u$. Na podstawie (24) i (20) otrzymamy:

$$\tan u^{(in)} = \frac{Cx_K \tan u + b \cos u - b - \Delta b^{(in)}}{C(x_K - 2b \sin u)} \quad (27)$$

Table 3. Values of angles u^{in} and u^{out} in variants I and II for the curve (5)
Tabela 3. Wartości kątów u^{in} oraz u^{out} w wariantach I i II w przypadku krzywej (5)

Curve/ Krzywa	R_E [m]	b [m]	u [°]	Variant I/Wariant I		Variant II/Wariant II	
				u^{in} [°]	u^{out} [°]	u^{in} [°]	u^{out} [°]
(5)	200	3,50	10	7,78	11,17	9,78	10,22
			20	19,33	20,57	19,94	20,06
			30	29,72	30,26	30,01	29,99
			40	39,91	40,09	40,04	39,96
			50	50,00	50,00	50,06	49,94
			60	60,04	59,96	60,05	59,95
			70	70,03	69,97	70,04	69,96
		3,00	10	8,16	11,07	9,78	10,22
			20	19,42	20,51	19,93	20,07
			30	29,76	30,23	30,00	30,06
			40	39,92	40,08	40,03	39,97
			50	50,00	50,00	50,05	49,95
			60	60,03	59,97	60,04	59,96
			70	70,03	69,97	70,03	69,97
	100	3,50	10	0,70	12,20	9,05	10,91
			20	18,28	21,25	19,66	20,33
			30	29,30	30,60	29,90	30,10
			40	39,75	40,23	40,02	39,98
			50	49,98	50,02	50,09	49,92
			60	60,06	59,94	60,09	59,91
			70	70,06	69,94	70,07	69,93
		3,00	10	3,21	12,08	9,05	10,92
			20	18,49	21,14	19,64	20,34
			30	29,37	30,55	29,88	30,12
			40	39,77	40,21	40,00	40,00
			50	49,97	50,03	50,06	49,94
			60	60,05	59,95	60,08	59,92
			70	70,05	69,95	70,06	69,94

From (21) and (25), taking into account $\Delta x = b \sin u$, $\Delta y = b \cos u$ it follows that:

$$\tan u^{(out)} = \frac{Cx_K \tan u - b \cos u + b + \Delta b^{(out)}}{C(x_K + 2b \sin u)} \quad (28)$$

The values $u^{(in)}$ and $u^{(out)}$ calculated on the basis of (27) and (28) are given in Tables 3 and 4. The given values confirm that the second variant of edge routing is more advantageous than the first one. The values given in Table 4 show that – in comparison with the values of $\Delta u = u^{(in)} - u$ and $\Delta u = u^{(out)} - u$ given in Table 3 – the differences Δu do not exceed $0,5^\circ$ already for the angles $u \geq 20^\circ$.

Summary

The article analyses the so-called general transition curves as a tool for shaping road widenings on curves. Due to the fact

Table 4. Values of angles u^{in} and u^{out} in variants I and II for the curve (6)
Tabela 4. Wartości kątów u^{in} oraz u^{out} w wariantach I i II w przypadku krzywej (6)

Curve/ Krzywa	R_E [m]	b [m]	u [°]	Variant I/Wariant I		Variant II/Wariant II	
				u^{in} [°]	u^{out} [°]	u^{in} [°]	u^{out} [°]
(6)	200	3,50	10	5,94	11,79	9,68	10,31
			20	18,87	20,92	19,90	20,10
			30	29,51	30,45	29,98	30,01
			40	39,84	40,18	40,03	39,97
			50	49,97	50,03	50,06	49,94
			60	60,03	59,97	60,06	59,94
			70	70,04	69,97	70,04	69,96
		3,00	10	6,74	11,63	9,68	10,31
			20	19,02	20,82	19,89	20,11
			30	29,57	30,40	29,98	30,02
			40	39,84	40,16	40,02	39,98
			50	49,97	50,03	50,05	49,95
			60	60,02	59,97	60,05	59,95
			70	70,03	69,97	70,03	69,97
	100	3,50	10	-14,06	13,17	8,67	11,26
			20	17,08	21,94	19,48	20,49
			30	28,80	31,00	29,81	30,18
			40	39,53	40,43	39,98	40,02
			50	49,89	50,10	50,07	49,93
			60	60,04	59,96	60,10	59,90
			70	70,07	69,94	70,08	69,92
		3,00	10	-4,84	13,01	8,66	11,27
			20	17,48	21,77	19,47	20,50
			30	28,94	30,91	29,79	30,20
			40	39,57	40,39	39,96	40,04
			50	49,90	50,10	50,05	49,95
			60	60,03	59,97	60,08	59,92
			70	70,05	69,95	70,06	69,94

Z (21) i (25), z uwzględnieniem $\Delta x = b \sin u$, $\Delta y = b \cos u$ wynika natomiast:

$$\tan u^{(out)} = \frac{Cx_K \tan u - b \cos u + b + \Delta b^{(out)}}{C(x_K + 2b \sin u)} \quad (28)$$

Wartości $u^{(in)}$ i $u^{(out)}$, obliczone na podstawie (27) i (28), zamieszczono w tabelach 3 i 4. Podane wartości potwierdzają, że drugi wariant trasowania krawędzi jest korzystniejszy niż pierwszy. Wartości z tabeli 4 pokazują, że w porównaniu z wartościami $\Delta u = u^{(in)} - u$ oraz $\Delta u = u^{(out)} - u$ podanymi w tabeli 3 – różnica Δu nie przekracza $0,5^\circ$ już w przypadku kątów $u \geq 20^\circ$.

Podsumowanie

W artykule analizowano tzw. ogólne krzywe przejściowe jako narzędzie do kształtowania poszerzeń jezdni na łukach. Ze

that – in accordance with WR-D-22-2 – the road edges should be considered as separately designed transition curves, the subject of the research was the possibility of a separate description of the roadway axis and each edge using general transition curves with appropriately selected design parameters. In order not to exceed the specified values of road widening, this problem was analysed in two variants, i.e. with identical (variant I) and different (variant II), appropriately selected values of tangent inclinations at the starting and ending points of the curve.

The studies have shown that it is possible to describe the carriageway axis and each edge separately using an appropriately selected equation of the general transition curve. The variant II has proven to be more advantageous from the point of view of engineering practice. It has also been found that problematic situations may occur, which are related to maintaining the appropriate value of carriageway widening. In this case, the solution is to use the appropriate method of routing (e.g. variant II) and the non-exceeding permissible values of tangential gradients at the extreme points of the arcs describing each edge.

It cannot be ruled out that – in the opinion of some readers – the analyses carried out may suggest a greater degree of complexity of the process of designing roadway widenings using general transition curves compared to the approach based on the use of the clothoid. Therefore, it should be clearly stated that the aim of the analyses presented was to verify the possibilities of shaping roadway widenings using general transition curves. This does not in any way transfer to design practice with the possible use of general transition curves.

Assuming that the turning angle of the route, the designed value of the curve radius and the designed value of the road widening in the middle of the curve are given, the design of the appropriate curve describing the road axis/outer edge/inner edge comes down to calculating the ordinates of the curve points based on the appropriate equation (5) or (6). This was presented in [10].

Received: 14.10.2024
Revised: 30.12.2024
Published: 25.04.2025

względem na to, że zgodnie z WR-D-22-2 krawędzie drogi należy rozpatrywać jako odrębnie zaprojektowane krzywe przejściowe, przedmiotem badań była możliwość odrębnego opisu osi jezdni i każdej krawędzi za pomocą ogólnych krzywych przejściowych o odpowiednio dobranych parametrach projektowych. Aby nie przekroczyć określonych wartości poszerzenia jezdni, problem ten przeanalizowano w dwóch wariantach, tzn. przy jednakowych (wariant I) oraz różnych (wariant II), odpowiednio dobranych wartościach nachylenia stycznych w punktach skrajnych łuku.

Badania wykazały, że jest możliwy odrębny opis osi jezdni i każdej krawędzi za pomocą odpowiednio wybranego równania ogólnej krzywej przejściowej. Korzystniejszy, z punktu widzenia praktyki inżynierskiej, okazał się wariant II. Stwierdzono przy tym możliwość wystąpienia sytuacji problematycznych, które są związane z zachowaniem odpowiedniej wartości poszerzenia jezdni. W tym przypadku, rozwiązaniem jest zastosowanie właściwego sposobu trasowania (np. wariant II) i nieprzekraczalnie dopuszczalnych wartości pochyłeń stycznych w punktach skrajnych łuków opisujących każdą z krawędzi.

Nie można wykluczyć, że – w odczuciu części czytelników – przeprowadzone analizy mogą sugerować większy stopień skomplikowania procesu projektowania poszerzenia jezdni z użyciem ogólnych krzywych przejściowych w porównaniu z podejściem bazującym na zastosowaniu klotoidy. Należy więc wyraźnie zaznaczyć, że celem przedstawionych analiz była weryfikacja możliwości kształtowania poszerzeń jezdni z użyciem ogólnych krzywych przejściowych. W żaden sposób nie przenosi się to na praktykę projektową z ewentualnym użyciem tych krzywych.

Przy założeniu, że dane są kąt zwrotu trasy, projektowana wartość promienia łuku i projektowana wartość poszerzenia w jezdni w środku łuku, zaprojektowanie odpowiedniej krzywej opisującej oś jezdni/krawędź zewnętrzną/krawędź wewnętrzną sprowadza się do obliczenia rzędnych punktów krzywej na podstawie właściwego równania (5) lub (6), co przedstawione jest w [10].

Artykuł wpłynął do redakcji: 14.10.2024 r.
Otrzymano poprawiony po recenzjach: 30.12.2024 r.
Opublikowano: 25.04.2025 r.

Literature

- [1] Rozporządzenie Ministra Infrastruktury z 24 czerwca 2022 r. w sprawie przepisów techniczno-budowlanych dotyczących dróg publicznych. Dz.U. 2022 poz. 1518.
- [2] WR-D-22-2. Wytyczne projektowania odcinków dróg zamiejscowych. Część 2: Kształtowanie geometryczne. Wzorce i standardy rekomendowane przez Ministra właściwego ds. transportu, Warszawa, 2023.
- [3] Lipiński M. Geometria i tyczenie tras drogowych. W: Geodezja inżynierska, tom III. Polskie Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych im. E. Romera, Warszawa – Wrocław, 1993.
- [4] Kobryń A. Krzywe przejściowe w trasowaniu dróg. Teoria i praktyka. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2023.

- [5] Przewłocki S. Geodezja inżyniersko-drogowa. Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2000.
- [6] Lewinowski Cz., Trylski Z. Projektowanie krzywych przejściowych w budownictwie drogowym. PWN, Warszawa, 1984.
- [7] Brockenbrough R.L. (Ed.) Highway engineering handbook. McGraw-Hill, New York, 2009.
- [8] Grabowski R.J. Ogólne krzywe przejściowe. Geodezja i kartografia. 1975; 20 (3): 235 – 246.
- [9] Grabowski R.J. Gładkie przejścia krzywoliniowe w drogach kołowych i kolejowych. Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja. 1984; nr 82.
- [10] Kobryń A. Ogólne krzywe przejściowe jako alternatywa dla tradycyjnych łuków poziomych w trasowaniu dróg. Roads and Bridges – Drogi i Mosty. 2024; 23: 99 – 116.