

Roman Gąckowski, EngD¹⁾
ORCID: 0000-0002-4456-3011

Analysis of limit states of prestressed concrete beams with large spans in the construction of densely ribbed ceilings

Analiza stanów granicznych belek strunobetonowych o dużej rozpiętości w konstrukcjach stropów gęstożebrowych

DOI: 10.15199/33.2024.12.02

Abstract. In the article, the author presents an analysis of the ultimate limit states ULS and SLS serviceability of ribs in a densely ribbed roof with prestressed concrete beams RS139. 3D numerical models of the ceilings were made in the calculation program, changing the quantity and length of RS139 beams. The results of the analysis are presented in charts. Cross-sections with spans from 10 to 15 meters were subjected to detailed analysis. Such spans of densely ribbed floors are not yet used in projects.

Keywords: densely ribbed ceilings; prestressed concrete beams; limit states of the structure.

Streszczenie. W artykule przedstawiono analizę stanów granicznych nośności ULS i użytkowości SLS żeber w stropie gęstożebrowym, z belkami strunobetonowymi RS139. Wykonano modele numeryczne 3D stropów w programie obliczeniowym, zmieniając liczbę oraz długość belek RS139. Wyniki przeprowadzonej analizy przedstawiono na wykresach. Szczegółowej analizie poddano przekroje o rozpiętości 10 – 15 m. Obecnie taka rozpiętość stropów gęstożebrowych nie jest jeszcze stosowana w projektach.

Słowa kluczowe: stropy gęstożebrowe; belki strunobetonowe; stany graniczne konstrukcji.

Densely ribbed ceilings are the basic type of structure that is used in public and residential buildings, single and multi-family buildings. This is conditioned by technological and economic considerations as well as due to the limit states of load-bearing capacity and serviceability, fire, heat and acoustic requirements.

At the end of the 19th century, **J. Monier** was the first to make a concrete ceiling reinforced with a steel mesh in a slab-beam system, which gave rise to reinforced concrete structures. On this basis, in 1892, ceramic-steel ceilings of the Klein type (ceilings made of steel beams filled with ceramic plates reinforced with cooperage) began to be used. At the beginning of the 20th century, the Akerman ceiling was invented. A common feature of all this type of ceilings is the spacing of load-bearing elements (ribs) not greater than 90 cm. The development of densely ribbed ceiling structures was possible thanks to the evolution that took place in reinforced concrete research (France 1893), prestressed elements (E. Freyssinet, France 1928) and the use of prefabrication in reinforced concrete structures (United States 1907). According to [1, 2], in Poland in the interwar period, densely ribbed ceilings of the Akerman and Klein types were used, considered to be the first structure using prefabricated ribs. Since then, there has been a rapid development in the field of modification of densely ribbed ceilings with the use of various types of

Stropy gęstożebrowe to podstawowy rodzaj konstrukcji, która stosowana jest w budynkach użyteczności publicznej oraz mieszkalnych jedno- i wielorodzinnych. Jest to uwarunkowane względami technologicznymi i ekonomicznymi oraz ze względu na stany graniczne nośności i użytkowości, wymagania przeciwpożarowe, ciepłne oraz akustyczne.

W końcu XIX w. **J. Monier** jako pierwszy wykonał strop betonowy zbrojony siatką stalową w układzie płytowo-belkowym, co dało początek konstrukcjom żelbetowym. Na tej podstawie w 1892 r. zaczęto stosować stropy ceramiczno-stalowe typu Kleina (stropy wykonane z belek stalowych wypełnionych płytami ceramicznymi zbrojonymi bednarką). Na początku XX w. wynaleziono strop Akermana. Cechą wspólną wszystkich tego typu stropów jest rozstaw elementów nośnych (zeber) nie większy niż 90 cm. Rozwój konstrukcji stropów gęstożebrowych był możliwy dzięki ewolucji, jaka dokonała się w badaniach elementów żelbetowych (Francja 1893 r.), elementów wstępnie sprężanych (E. Freyssinet Francja 1928 r.) oraz zastosowania prefabrykacji w konstrukcjach żelbetowych (Stany Zjednoczone 1907 r.). Zgodnie z [1, 2], w Polsce w okresie międzywojennym stosowane były stropy gęstożebrowe typu Akermana i Kleina, uznane za pierwszą konstrukcję z zastosowaniem żeber prefabrykowanych. Od tego okresu nastąpił szybki rozwój w dziedzinie modyfikowania stropów gęstożebrowych z wykorzystaniem różnego rodzaju pustaków (typu Ferstera, DS, DMS), stanowiących jedynie wypełnienie stropu. W 1954 r. po raz pierwszy w Polsce zastosowano w stropach gęsto-

¹⁾ Czestochowa University of Technology, Faculty of Civil Engineering, Department of Construction Process Engineering; roman.gackowski@pcz.pl

hollow bricks (Ferster, DS, DMS type), which are only filling the ceiling. In 1954, for the first time in Poland, prestressed prestressed reinforced concrete beams were used in densely ribbed ceilings. On the basis of [4], several types of reinforced concrete densely ribbed ceilings can be listed: TK type with hollow bricks and shells with a height of 20, 25 and 30 cm; MK-1 and MK-2 type with gypsum boards; type DZ; KMK type with gypsum blocks and T-24 and T-27 beams at 60 and 90 cm spacing and with concrete superstructure; K-type with precast beams and with prefabricated top flange; De-Ce type with reinforced concrete shells supplemented with concrete superstructure; Kontra type with slag concrete blocks; type T-27 with precast beams and with precast upper and lower slabs; ITB-70 type with prefabricated truss beams, which were later used in Fert, Teriva and Mursa ceilings with DZ-3 hollow bricks. Abroad, modern structural solutions were used in densely ribbed ceilings, such as: STUP; Fabre with ceramic hollow bricks and prefabricated prestressed T-beams; OPI-SIMPLEX with prefabricated reinforced concrete T-beams and hollow bricks; PRAT with light lattice beams and hollow blocks or concrete slabs between these beams [1, 2].

In densely ribbed ceilings with precast beams, the main load-bearing elements are composite ribs, which consist of various types of precast beams, non-structural or structural hollow bricks, and structural super-concrete laid on site. Examples of the use of various types of precast beams in densely ribbed ceilings are shown in Figure 1 with a division into reinforced concrete, truss and prestressed beams [3 – 5]. In order to stiffen the ceiling structure in a direction perpendicular to the main direction of work, dividing ribs are made, which also ensure optimal cooperation between the supporting fins.

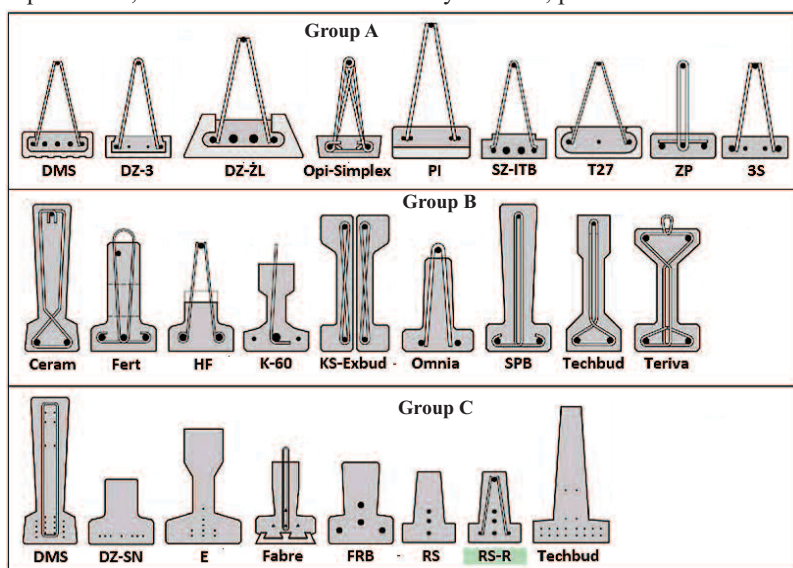


Fig. 1. Types of precast beams used in densely ribbed ceilings: Group A – reinforced concrete beams; Group B – truss beams; Group C – prestressed beams (this group includes the RS139 prestressed concrete beam subjected to analysis)

Rys. 1. Rodzaje belek prefabrykowanych stosowanych w stropach gęstożebrowych: Grupa A – belki żelbetowe; Grupa B – belki kratownicowe; Grupa C – belki sprężone (w tej grupie znajduje się belka strunobetonowa RS139 poddana analizie)

Characteristics of the densely ribbed ceiling with prestressed concrete beams RS139

The analysis of the ultimate limit states of ULS and serviceability limit states of SLS was carried out on a densely ribbed ceiling with prestressed concrete beams in a public utility building. Using licensed calculation programs, a 3D numerical model of the ceiling was made in five variants. Variants from I to V are a ceiling with reinforced concrete ribs, in which there is one prestressed concrete beam RS139 (Figure 2 B-1),

browych sprężone strunobetonowe belki żelbetowe. Na podstawie [1 – 4] można wymienić kilka rodzajów żelbetowych stropów gęstożebrowych: typu TK z pustakami zamkniętymi i łupinami o wysokości 20, 25 i 30 cm; typu MK-1 i MK-2 z dyłkami gipsowymi; typu DZ; typu KMK z pustakami gipsowymi i belkami typu T-24 i T-27 w rozstawie 60 i 90 cm oraz z nadbetonem; typu K z prefabrykowanych belek i z prefabrykowaną górną półką; typu De-Ce z łupinami żelbetowymi uzupełnione nadbetonem; typu Kontra z pustakami żużlobetonowymi; typu T-27 z prefabrykowanymi belkami oraz z prefabrykowanymi płytami górnymi i dolnymi; typu ITB-70 z prefabrykowanymi belkami kratownicowymi, które w późniejszym okresie zostały wykorzystane w stropach typu Fert, Teriva i Mursa z pustakami DZ-3. Za granicą w stropach gęstożebrowych stosowano nowoczesne rozwiązania konstrukcyjne typu: STUP; Fabre z pustakami ceramicznymi i z prefabrykowanymi sprężonymi belkami teowymi; OPI-SIMPLEX z prefabrykowanymi żelbetowymi belkami teowymi i pustakami; PRAT z lekkimi kratowymi belkami i pustakami lub płytami betonowymi między tymi belkami [1, 2].

W stropach gęstożebrowych z belkami prefabrykowanymi, głównymi elementami nośnymi są żebra zespolone, które składają się z różnego rodzaju prefabrykowanych belek, pustaków niekonstrukcyjnych lub konstrukcyj-

nych oraz nadbetonu konstrukcyjnego układanego na budowie. Przykłady stosowania różnego typu prefabrykowanych belek w stropach gęstożebrowych przedstawiono na rysunku 1 z podziałem na belki żelbetowe, kratownicowe i sprężone [3 – 5]. W celu usztywnienia konstrukcji stropu, w kierunku prostopadłym do głównego kierunku pracy, wykonuje się żebra rozdzielcze, które również zapewniają optymalną współpracę między żebrowymi nośnymi.

Charakterystyka stropu gęstożebrowego z belkami strunobetonowymi RS139

Analizie stanów granicznych nośności ULS i stanów granicznych użytkowości SLS poddano strop gęstożebrowy z belkami strunobetonowymi w budynku użyteczności publicznej. Korzystając z licencjonowanych programów obliczeniowych, wykonano model numeryczny 3D stropu w pięciu wariantach. Warianty od I do V, to strop z żebrowymi żelbetowymi, w których odpowiednio jest jedna belka strunobetonowa RS139 (rys-

two RS139 beams (Figure 2 B-2), three prestressed concrete beams RS139 (Figure 2 B-3), four prestressed concrete beams RS139 (Figure 2 B-4) and five RS139 beams (Figure 2 B-5). In each variant, a different span of beams was used, divided into two groups. The first group consists of typical beams currently used in the design of densely ribbed ceilings with spans of 6, 7, 8, 9 and 10 m. The second group consists of beams with a large span of 11, 12, 13, 14 and 15 m, proposed by me for use in the future in the design of ribbed ceilings.

The exact cross-sections of the ribs in the analyzed densely ribbed ceilings are shown in Figure 3. In the numerical model, a load uniformly distributed over the entire surface of the floor and a line load from partition walls perpendicular to the direction of the ribs were assumed (for each rib, a line and concentrated load collected from a strip with a b_{eff} width given in Image 3 was assumed. The values of the loads were adopted as follows:

- permanent load: 2.2 kN/m²;
- load from partition walls (equivalent load): 1.2 kN/m²;
- payload according to [6] use category A: 2.0 kN/m²;
- weight of concrete superstructure: according to the

number of RS139 a) beams used

- weight of beam RS139: 0,205 kN/m

Geometrical and material parameters of the ceiling: span of the analyzed ceiling – 6 – 15 m in steps of 1 m;

- classic rib spacing with RS139 beam: 60 cm;
- ceiling thickness (RP25 hollow bricks + concrete superstructure 9.0 cm) – 34 cm;

- support of the beams on the wall – 5.0 cm;
- concrete class of beam RS139 – C50/60;

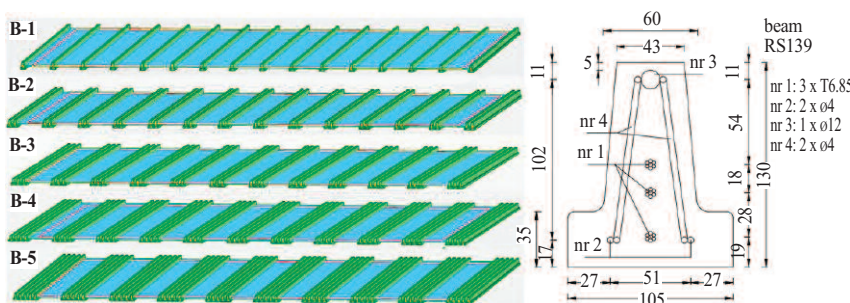


Fig. 2. The calculation model 3D of a densely ribbed ceiling with RS139 prestressed concrete beams included in the rib: B-1 – one beam in the ceiling rib; B-2 – two beams in the ceiling rib; B-3 – three beams in the ceiling rib; B-4 – four beams in the ceiling rib; B-5 – five beams in the ceiling rib. Dimensions of the RS139 prestressed concrete beam

Rys. 2. Model obliczeniowy 3D stropu gęstożebrowego z belkami strunobetonowymi RS139 wchodzącymi w skład żeberka: B-1 – jedna belka w żeberku stropu; B-2 – dwie belki w żeberku stropu; B-3 – trzy belki w żeberku stropu; B-4 – cztery belki w żeberku stropu; B-5 – pięć belek w żeberku stropu. Wymiary belki strunobetonowej RS139

przy projektowaniu stropów gęstożebrowych o rozpiętości 6, 7, 8, 9 i 10 m. Grupa druga to belki o dużej rozpiętości 11, 12, 13, 14 i 15 m, zaproponowane przeze mnie do wykorzystania w przyszłości przy projektach stropów gęstożebrowych.

Dokładne przekroje poprzeczne żeber w analizowanych stropach gęstożebrowych przedstawiono na rysunku 3. W modelu numerycznym przyjęto obciążenie równomiernie rozłożone na całej powierzchni stropu oraz obciążenie liniowe od ścianek działowych prostopadłych do kierunku żeber (na każde żebro przyjęto obciążenie liniowe i skupione zebrane z pasma o szerokości b_{eff} podanej na rysunku 3. Wartości obciążeń przyjęto odpowiednio:

- obciążenie stałe – 2,2 kN/m²;
- obciążenie od ścianek działowych (obciążenie zastępcze) – 1,2 kN/m²;
- obciążenie użytkowe zgodnie z [6] kategoria użytkowania

A – 2,0 kN/m²;

- ciężar nadbetonu: zgodnie z liczbą zastosowanych belek RS139;

- ciężar belki RS139 – 0,205 kN/m.

Parametry geometryczne i materiałowe stropu:

- rozpiętość analizowanego stropu – 6 – 15 m z krokiem co 1 m;
- rozstaw klasyczny żeber z belką RS139 – 60 cm;

- grubość stropu (pustaki RP25 + nadbeton 9,0 cm) – 34 cm;
- oparcie belek na murze – 5,0 cm;

- klasa betonu belek RS139 – C50/60;

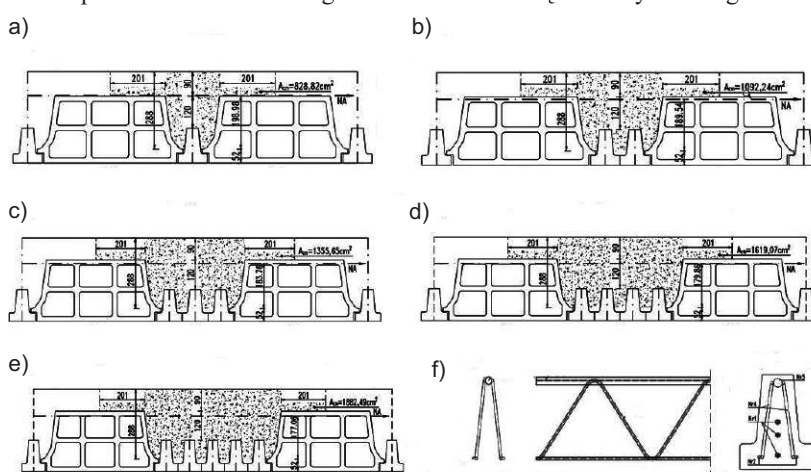


Fig. 3. Rib cross-sections in a densely ribbed ceiling with a thickness of 34 cm. The rib consists of one to five prestressed concrete beams RS139 and concrete superstructure: a) rib with one RS139 beam; b) rib with two RS139 beams; c) Rib with three RS139 beams; d) Rib with four RS139 beams; e) Rib with five RS139 beams; f) cross-section through RS139 beam and stiffening truss in RS139 beam

Rys. 3. Przekroje poprzeczne żeberka w stropie gęstożebrowym o grubości 34 cm. Żeberko składa się od jednej do pięciu belek strunobetonowych RS139 i nadbetonu: a) żeberko z jedną belką RS139; b) żeberko z dwiema belkami RS139; c) żeberko z trzema belkami RS139; d) żeberko z czterema belkami RS139; e) żeberko z pięcioma belkami RS139; f) przekrój poprzeczny przez belkę RS139 oraz kratownica usztywniająca w belce RS139

- supplementary concrete class (superconcrete in slab and composite rib) – C25/30;
- RS139 beam prestressing steel (prestressing tendons) – T6.85 made of Y2060S7 steel; $f_{pk} = 2060$ MPa;
- mild steel in RS139 prestressed concrete beams and in supplementary concrete – class C B500SP EPSTAL;
- reinforcing steel in the ceiling (supplementary concrete) – class B RB500.

Selected results of the ULS and SLS analysis of the ribs of a ribbed roof

The article presents the analysis of the operation of the reinforced concrete rib structure in the densely ribbed ceiling due to the ULS ultimate limit state of RS139 beams cooperating with supplementary concrete and the SLS serviceability limit state due to cracks and deflections. Based on the calculation results from numerical models, diagrams of some dependencies related to the bearing states are presented. Numerical calculations were made on five models of the ceiling, in which the number of prestressed concrete beams in the ceiling rib was differentiated (Figures 2 and 3).

Using publications [7 – 10], standards [11 – 15] and own professional knowledge, a shortened procedure was presented, on the basis of which the work of the ceiling ribs was analyzed.

ULS analysis – bending. With regard to densely ribbed ceilings with ribs, which include a beam or a set of precast prestressed concrete beams RS139 and supplementary concrete, the rules for designing cross-sections and checking the bending resistance are included in PN-EN 15037-1:2011 item [12]. In span sections calculated for positive moments, the extent of the mating width $b_{eff} = l_z$ was determined according to the structural solution presented in [12] and in Figure 3. The bending resistance of the ribs M_{Rd} was checked from the simplified formula (1) given in [12]:

$$M_{Rd} = \frac{1}{\gamma_R} F_A \left(d - 0,5 \frac{F_A}{b_{eff} f_{cd}} \right) \quad (1)$$

where:

$$F_A = (n_p F_{pk} + F_{rk});$$

$$\gamma_R = 1,0 - \text{global factor of safety for boundary moment};$$

d – design height;

$b_{eff} = l_z$ – effective width of the compression zone equal to the spacing of beams or beam set RS139;

f_{cd} – design compressive strength of supplementary concrete in the compression part of the cross-section;

n_p – number of active prestressing tendons in RS139 beam;

F_{pk} – breaking force of a single prestressing cable;

$F_{rk} = A_s f_{yk}$ for reinforcing steel with a total cross-section A_s .

The ratio of the bending moment M_{Ed} to M_{Rd} in individual variants and groups is shown in Figure 4.

ULS analysis – shear. In densely ribbed floors with composite ribs, when determining the shear resistance according to standards [11] and [12] and [5], the design width of the stiffener is assumed at a distance of 1/3 of the rib height from the bottom and is only used when considering concrete in the precast beam and concrete laid on site. Composite floor

- klasa betonu uzupełniającego (nadbeton w płycie i żebrze zespolonym) – C25/30;
- stal sprężająca belek RS139 (ciągną sprężające) – T6.85 ze stali Y2060S7; $f_{pk} = 2060$ MPa;
- stal miękka w belkach strunobetonowych RS139 oraz w betonie uzupełniającym – klasa C B500SP EPSTAL;
- stal zbrojeniowa w stropie (beton uzupełniający) – klasa B RB500.

Wybrane wyniki analizy stanów ULS i SLS żebra stropu gęstożebrowego

W artykule przedstawiono analizę pracy konstrukcji żebra żelbetowego w stropie gęstożebrowym z uwagi na stan graniczny nośności ULS belek RS139 współpracujących z betonem uzupełniającym oraz stan graniczny użyteczności SLS z uwagi na rysy i ugięcia. Na podstawie wyników obliczeniowych z modeli numerycznych przedstawiono wykresy niektórych zależności związanych ze stanami nośności. Wykonano obliczenia numeryczne na pięciu modelach stropu, w którym zróżnicowano liczbę belek strunobetonowych w żebrze stropu (rysunki 2 i 3).

Korzystając z publikacji [7 – 10], norm [11 – 15] oraz własnej wiedzy zawodowej, przedstawiono skróconą procedurę, na podstawie której dokonano analizy pracy żeber stropu.

Analiza ULS – zginanie. W odniesieniu do stropów gęstożebrowych z żebrami, w skład których wchodzi belka lub zestaw belek prefabrykowanych strunobetonowych RS139 oraz beton uzupełniający, zasady wymiarowania przekrojów oraz sprawdzania nośności na zginanie zawarte są w PN-EN 15037-1:2011 pozycja [12]. W przekrojach przeszłowych obliczanych na momenty dodatnie, zasięg szerokości współpracującej $b_{eff} = l_z$ określono zgodnie z rozwiązaniem konstrukcyjnym przedstawionym w [12] oraz na rysunku 3. Nośność żeber na zginanie M_{Rd} sprawdzono z uproszczonego wzoru (1) zawartego w [12]:

$$M_{Rd} = \frac{1}{\gamma_R} F_A \left(d - 0,5 \frac{F_A}{b_{eff} f_{cd}} \right) \quad (1)$$

gdzie:

$$F_A = (n_p F_{pk} + F_{rk});$$

$\gamma_R = 1,0$ – globalny współczynnik bezpieczeństwa dla momentu granicznego;

d – wysokość obliczeniowa;

$b_{eff} = l_z$ – szerokość efektywna strefy ściskanej równa rozstawowi belek lub zestawu belek RS139;

f_{cd} – obliczeniowa wytrzymałość na ściskanie betonu uzupełniającego w części ściskanej przekroju poprzecznego;

n_p – liczba aktywnych ciągnię sprężających w belce RS139;

F_{pk} – siła niszcząca pojedyncze ciągnie sprężające;

$F_{rk} = A_s f_{yk}$ dla stali zbrojeniowej o całkowitym przekroju A_s .

Stosunek momentu zginającego M_{Ed} do M_{Rd} w poszczególnych wariantach i grupach przedstawiono na rysunku 4.

Analiza ULS – ścinanie. W stropach gęstożebrowych z żebrami zespolonymi przy wyznaczaniu nośności na ścinanie, zgodnie z normami [11] i [12] oraz [5], przyjmuje się obliczeniową szerokość żebra w odległości 1/3 wysokości żebra, licząc od dołu oraz sprawdza tylko z uwzględnieniem betonu w belce prefabrykowanej i betonu układanego na budowie. Zespolone systemy stropowe z nadbetonem konstrukcyjnym

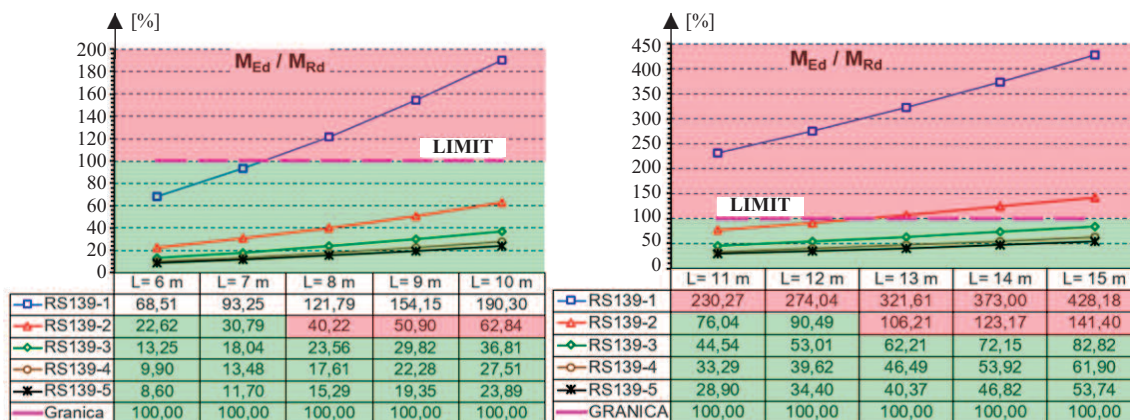


Fig. 4. Ultimate limit state diagram for ribs with RS139 prestressed concrete beams
 Rys. 4. Wykres stanów granicznych nośności żeber z belkami strunobetonowymi RS139

systems with structural superconcrete laid on site (Appendix B) [12] do not require the use of shear reinforcement. In practice, bars from $\phi 8$ to $\phi 14$ bent at the end support or straight bars at the intermediate support made of "B" or "C" steel are used. The bars are placed one piece (two pieces in justified cases) over the ends of each precast beam, fastening them to the 4.5 reinforcement mesh ϕ with a mesh of 200 x 200 mm, which is used to reinforce the concrete superstructure above the hollow bricks.

In the design models that I made, the soft reinforcement was considered when checking the shear resistance according to [5, 10, 11, 12]. One bar $\phi 14$ above each RS139 beam and a reinforcing mesh in the concrete superstructure made of bars $\phi 6$ with a mesh of 150 x 150 mm. The following tests were performed: shear resistance for non-cracked and flexurally scratched elements; longitudinal and transverse shear resistance of the composite rib; condition of the need to use stitching reinforcement in the joint.

Figure 5 only gives the final results of the shear resistance in the cracked floor slab zone using formula (2) giving the ratio of the shear force V_{Ed} to the force $V_{Rd,c}$.

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,c} = \max(V_{Rd,c1}; V_{Rs,c2}) \quad (2)$$

SLS analysis – the possibility of cracks perpendicular to the axis of the element. The serviceability limit state of SLS, related to the crack opening width limitation, should be

układanym na budowie (Załącznik B) [12] nie wymagają stosowania zbrojenia na ścinanie. W praktyce stosuje się pręty od $\phi 8$ do $\phi 14$ zagięte przy podporze skrajnej lub pręty proste przy podporze pośredniej ze stali klasy „B” lub „C”. Pręty układa się po jednej sztuce (w uzasadnionych przypadkach po dwie) nad końcami każdej belki prefabrykowanej, mocując je do siatki zbrojeniowej $\phi 4,5$ o oczkach 200 x 200 mm, którą zbroi się nadbeton znajdujący się nad pustakami.

W modelach obliczeniowych, które wykonałem, zostało uwzględnione zbrojenie miękkie przy sprawdzaniu nośności na ścinanie zgodnie z [5, 10, 11, 12]. Przyjęto po jednym pręcie $\phi 14$ nad każdą belką RS139 oraz siatkę zbrojeniową w nadbetonie z prętów $\phi 6$ o oczkach 150 x 150 mm. Wykonano sprawdzenie: nośności na ścinanie elementów niezarysowanych i zarysowanych przez zginanie; nośności żebra zespolonego na ścinanie podłużne i poprzeczne; warunku konieczności stosowania zbrojenia zszywającego w złączy.

Na rysunku 5 podano jedynie wyniki końcowe nośności na ścinanie w zarysowanej strefie płyty stropowej, stosując wzór (2) i podając stosunek siły ścinającej V_{Ed} do siły $V_{Rd,c}$.

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,c} = \max(V_{Rd,c1}; V_{Rs,c2}) \quad (2)$$

Analiza SLS – możliwość pojawienia się rys prostopa-dłych do osi elementu. Stan graniczny użyteczności SLS, związany z ograniczeniem szerokości rozwarcia rys należy

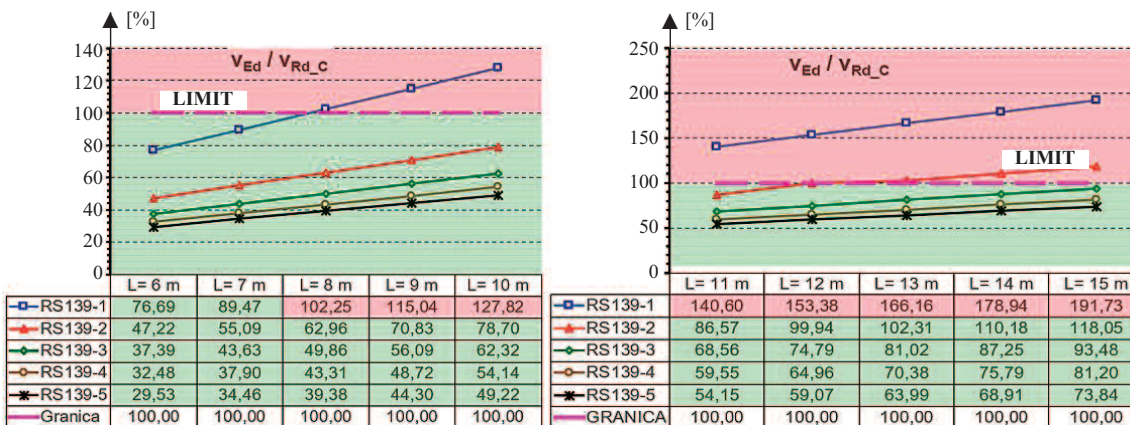


Fig. 5. Shear resistance diagram in cracked zone of slab in densely ribbed floor
 Rys. 5. Wykres nośności na ścinanie w zarysowanej strefie płyty w stropie gęstożebrowym

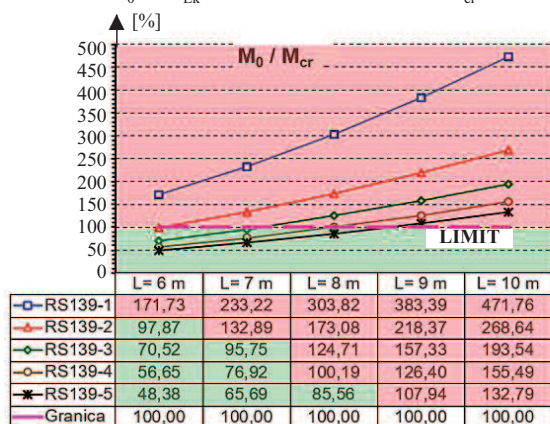
checked according to [5, 10, 11, 12]. In the case of prestressed beams located in the ribs of a densely ribbed slab, the stresses in the upper chord of the floor and the bottom chord of the beams are determined by assuming a non-cracked cross-section, while the cross-sectional area of the reinforcement should be replaced by an equivalent area of the cross-section of concrete, assuming the ratio of modulus of elasticity of steel to concrete E_s/E_{cm} . Checking the possibility of the appearance of cracks perpendicular to the element axis for the floor rib, the drawing moment M_{cr} for the rib cross-section was calculated and the value was compared with the characteristic bending moment $M_0 = M_{Ek}$ acting on the floor rib. The value of the drawing moment is calculated according to formula (3).

$$M_{cr} = W \left[f_{ctm} + \frac{r_{inf} P_{mt}}{A_{cs}} + \frac{r_{inf} P_{mt} (v_{cs} - v_s)}{J_{csb}} v_{cs} \right] \quad (3)$$

where:

- W – floor system cross-section strength index;
- P_{mt} – prestressing force after immediate and rheological losses, $r_{inf} = 0.95$;
- f_{ctm} – average tensile strength of concrete;
- v_s – distance of the center of gravity of the weaves from the bottom edge of the ceiling; A_{cs} – reduced surface area of fin;
- v_{cs} – position of the center of gravity of the cross-section of the descended rib;
- J_{csb} – brought moment of inertia of RS139 beam.

Figure 6 shows the results of the analysis of the possibility of cracking the floor ribs as the ratio of the value of the characteristic bending moment $M_0 = M_{Ek}$ to the drawing moment M_{cr} .



W przypadku belek sprężonych znajdujących się w żebrach stropu gęstożebrowego, naprężenia w pasie górnym stropu oraz pasie dolnym belek określa się, przyjmując przekrój niezarysowany, natomiast pole przekroju poprzecznego zbrojenia należy zastąpić równoważnym polem poprzecznego przekroju betonu, przyjmując stosunek modułów sprężystości stali do betonu E_s/E_{cm} . Sprawdzając możliwość pojawienia się rys prostopadłych do osi żebra stropu, obliczono moment rysujący M_{cr} dla przekroju poprzecznego żebra i porównano wartość z charakterystycznym momentem zginającym $M_0 = M_{Ek}$ działającym na żebro stropu. Wartość momentu rysującego obliczono zgodnie z wzorem (3).

$$M_{cr} = W \left[f_{ctm} + \frac{r_{inf} P_{mt}}{A_{cs}} + \frac{r_{inf} P_{mt} (v_{cs} - v_s)}{J_{csb}} v_{cs} \right] \quad (3)$$

gdzie:

- W – wskaźnik wytrzymałości przekroju systemu stropowego;
- P_{mt} – siła sprężająca po stratach doraźnych i reologicznych, $r_{inf} = 0.95$;
- f_{ctm} – średnia wytrzymałość betonu na rozciąganie;
- v_s – odległość środka ciężkości splotów od dolnej krawędzi stropu;
- A_{cs} – powierzchnia sprowadzona pola powierzchni żebra;
- v_{cs} – położenie środka ciężkości przekroju sprowadzonego żebra;
- J_{csb} – sprowadzony moment bezwładności belki RS139.

Na rysunku 6 przedstawiono wyniki analizy możliwości zarysowania żeber stropu jako stosunek wartości charakterystycznego momentu zginającego $M_0 = M_{Ek}$ do momentu rysującego M_{cr} .

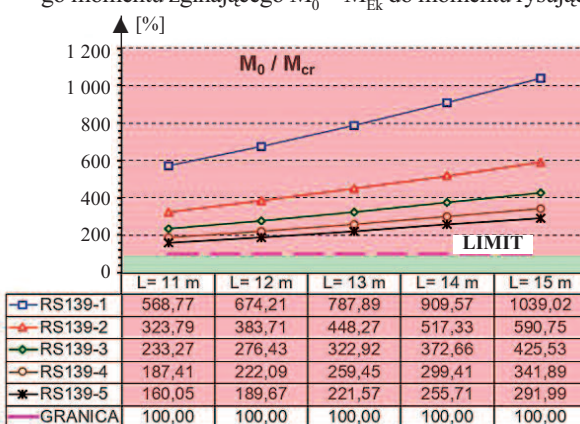


Fig. 6. Diagram of the ratio of the characteristic bending moment $M_0 = M_{Ek}$ to the cracking moment for the rib of a densely ribbed floor
Rys. 6. Wykres stosunku charakterystycznego momentu zginającego $M_0 = M_{Ek}$ do momentu rysującego w przypadku żebra stropu gęstożebrowego

SLS analysis – the width of opening of cracks perpendicular to the axis of the element. The serviceability limit state SLS related to the opening width of cracks perpendicular to the element axis should be checked according to [5, 10, 11, 12]. The width of the crack opening is determined from formula (4).

$$w_k = s_{r,max} (\epsilon_{sm} + \epsilon_{cm}) \leq w_{lim} = 0,2 \text{ mm} \quad (4)$$

where:

- $s_{r,max}$ – maximum scratch spacing;
- ϵ_{sm} – average reinforcement deformation calculated taking into account the influence of forced deformations and the influence of tension stiffening;
- ϵ_{cm} – average deformation of concrete between cracks.

Figure 7 presents the final results of the analysis due to the opening width of cracks perpendicular to the axis of the element as the ratio of the opening width of the crack w_k to the size of the permissible opening of the cracks $w_{lim} = 0.2 \text{ mm}$, according to [11].

Analiza SLS – szerokość rozwarcia rys prostopadłych do osi elementu. Stan graniczny użyteczności SLS związany z szerokością rozwarcia rys prostopadłych do osi elementu należy sprawdzać zgodnie z [5, 10, 11, 12]. Szerokość rozwarcia rys wyznaczono ze wzoru (4).

$$w_k = s_{r,max} (\epsilon_{sm} + \epsilon_{cm}) \leq w_{lim} = 0,2 \text{ mm} \quad (4)$$

gdzie:

- $s_{r,max}$ – maksymalny rozstaw rys;
- ϵ_{sm} – średnie odkształcenie zbrojenia obliczone z uwzględnieniem wpływu odkształceń wymuszonych oraz wpływu usztywnienia przy rozciąganiu;
- ϵ_{cm} – średnie odkształcenie betonu między rysami.

Na rysunku 7 przedstawiono końcowe wyniki analizy ze względu na szerokość rozwarcia rys prostopadłych do osi elementu jako stosunek szerokości rozwarcia rys w_k do wielkości dopuszczalnego rozwarcia rys $w_{lim} = 0,2 \text{ mm}$, zgodnie z [11].

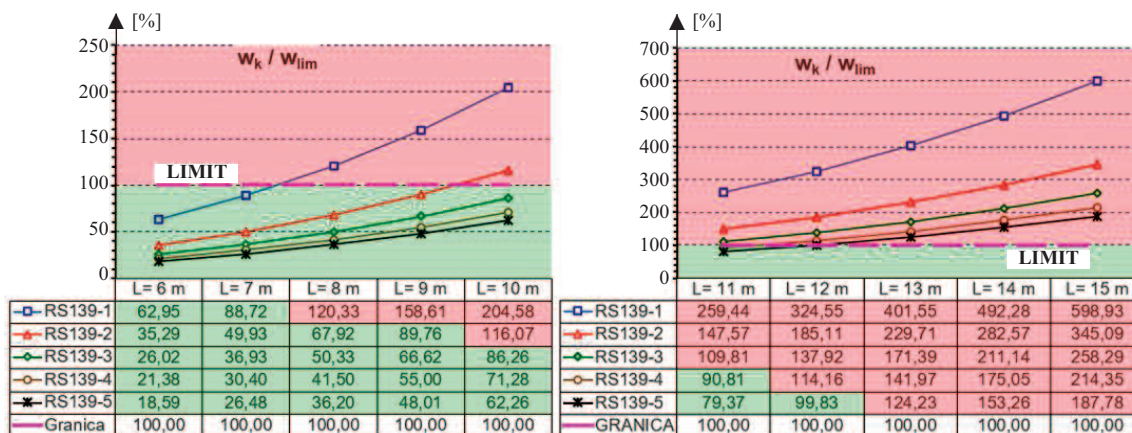


Fig. 7. Diagram of SLS – ratio of crack opening width to limit value
 Rys. 7. Wykres SLS – stosunek szerokości rozwarcia rys do wartości dopuszczalnej

SLS analysis – deflection of the ceiling rib. The active deflection of the densely ribbed ceilings f_a was determined as the difference between the total deflection w_t and the deflection w_a (formula 5), which occurs immediately after the removal of the mounting supports under the RS139 beams [12]. Figure 8 shows the final results of the analysis due to deflection as the ratio of the final deflection f_a to the permissible value of active deflection $f_{a,dop} = L_{eff}/350$ according to the standard [12], assuming the load of partition walls other than masonry and a non-brittle ceiling finish. According to [2, 9, 11], the permissible value of the deflection of a composite rib, consisting of a prestressed concrete beam RS139 and a structural concrete superstructure, should be $L/350$, where L is assumed as the span in the clear of the supports. In the calculations, the effective span according to the standard [11] was used to check the active deflection of the ceiling. In the calculation of the limit states of the deflection of composite ribs, the creep coefficient of concrete $\phi_b = 1.0$ for pre-cast beams and $\phi_n = 2.0$ for the concrete superstructure was taken into account. The difference in shrinkage deformations of the concrete beam and the concrete superstructure was assumed $\epsilon_{cs} = 40 \times 10^{-5}$. The value of creep and shrinkage coefficients was assumed on the basis of the analysis of tests carried out by the design team of the RS139 prestressed concrete beam plant and verified by calculations according to [10, 11, 12].

$$f_a = w_t - w_a \leq f_{a,dop} = L_{eff}/500 \quad (5)$$

Analiza SLS – ugięcie żebra stropu. Czynne ugięcie stropów gęstożebrowych f_a wyznaczono jako różnicę między całkowitym ugięciem w_t i ugięciem w_a (wzór 5), które występuje bezpośrednio po usunięciu podpór montażowych pod belkami RS139 [12]. Na rysunku 8 przedstawiono końcowe wyniki analizy ze względu na ugięcie jako stosunek ugięcia końcowego f_a do dopuszczalnej wartości czynnego ugięcia $f_{a,dop} = L_{eff}/350$ wg normy [12] przy założeniu obciążenia ściankami działowymi innymi niż murowane oraz niekruche wykończenia stropu. Zgodnie z [2, 9, 11], wartość dopuszczalna ugięcia żebra zespolonego, składającego się z belki strunobetonowej RS139 oraz nadbetonu konstrukcyjnego, powinna wynosić $L/350$, gdzie L przyjmuje się jako rozpiętość w świetle podpór. W obliczeniach do sprawdzenia czynnego ugięcia stropu przyjęto rozpiętość efektywną wg normy [11]. W obliczeniach stanów granicznych ugięcia żeber zespolonych uwzględniono współczynnik pełzania betonu $\phi_b = 1,0$ w belkach prefabrykowanych oraz $\phi_n = 2,0$ w przypadku nadbetonu. Różnicę odkształceń skurczowych betonu belki i nadbetonu przyjęto $\epsilon_{cs} = 40 \times 10^{-5}$. Wartość współczynników pełzania i skurczu przyjęto na podstawie analizy badań przeprowadzonych przez zespół projektowy wytwórni belek strunobetonowych RS139 oraz zweryfikowano obliczeniami zgodnie z [10, 11, 12].

$$f_a = w_t - w_a \leq f_{a,dop} = L_{eff}/500 \quad (5)$$

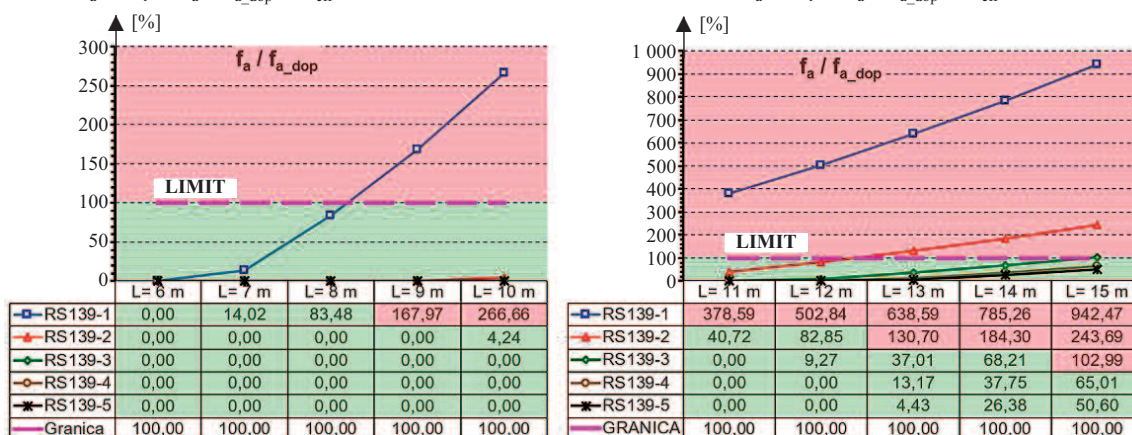


Fig. 8. SLS diagram – ratio of final deflection f_a to allowable deflection $f_{a,dop}$
 Rys. 8. Wykres SLS – stosunek ugięcia końcowego f_a do dopuszczalnego ugięcia $f_{a,dop}$

Summary of the ULS and SLS Bearing Capacity Analysis of Ribs of a Ribbed Floor

After conducting a detailed analysis of the ULS and SLS limit states of the prepared numerical models of the densely ribbed ceiling with reinforced concrete ribs, which consisted of one to five RS139 prestressed concrete beams, using a ceiling span of 6 – 15 m in steps of 10 cm, the following conclusions were drawn:

1) the load capacity of a rib with a span of 7.2 m with one RS139 beam is 98.65% of the permissible load capacity. For two RS139 beams in the slab ribs, the maximum span can be 12.6 m, which is 99.77% of the permissible load capacity. By using a larger number of RS139 beams in the floor stiffeners (three, four, or five), the load-bearing capacity is always maintained regardless of the floor span between 6 – 15 m (Figure 4);

2) the article presents the final result of only one selected shear limit state as the ratio of the design shear force in the V_{Ed} rib to the design shear limit force in the complex rib $V_{Rd,c}$ in which it is not necessary to design the shear reinforcement. The force ratio $V_{Ed}/V_{Rd,c}$ for a rib with a span of 7.8 m with one RS139 beam is 99.70%. With a span greater than 7.9 m, the shear reinforcement in the form of bars and stirrups must be additionally designed. With two to five beams in the slab rib cross-section, there is no need to additionally re-equip the stiffener due to shear (Figure 5). In practice, when designing densely ribbed floors with RS139 beams with large spans, reinforcement with $\phi 12$ bars is additionally used in the compression zone of the concrete above the beams;

3) analyzing the serviceability limit states due to cracking, the ratio of the characteristic bending moment $M_0 = M_{Ek}$ to the drawing moment of the cross-section of the ceiling rib M_{cr} was determined. In the case of ribs with two beams, the scratched cross-section will occur from the floor span of 6.1 m, where the M_0/M_{cr} value is 101.14%. Ribs containing three RS139 beams will be scratched from a span of 7.2 m, which is 101.24% of the M_{cr} value, ribs with four RS139 beams will be scratched only from a span of 8.0 m, which is 100.19% of the M_{cr} value, and with five RS139 beams in the rib, the span of the cracked cross-section increases to 8.7 m, which is 100.96% of the M_{cr} value. The results of the cracking analysis of the rib cross-section in a densely ribbed roof with prestressed concrete beams are given in Figure 6;

4) analyzing the cracked cross-sections of the floor ribs with RS139 beams in terms of the crack opening width perpendicular to the axis of the w_k element, it was found that in the case of ribs with one RS139 beam, the maximum span of the ceiling is 7.4 m, which is 100.62% of the permissible value of crack opening $w_{lim} = 0.2$ mm. Stiffeners containing two RS139 beams can be made up to 9.4 m of span so that the ratio $w_k/w_{lim} = 99.71\%$. Ribs with three RS139 beams and a span of 10.6 m give a value $w_k/w_{lim} = 99.88\%$. The w_k/w_{lim} ratio for the four RS139 beam fins, with spans of 11.4 m, is 99.66%. By using five RS139 beams in the ribs, a ceiling with a span of 12 m can be made. Then the ratio $w_k/w_{lim} = 99.83\%$. The results of the scratch analysis are shown in Figure 7;

Podsumowanie analizy nośności ULS i SLS żebra stropu gęstożebrowego

Po przeprowadzeniu szczegółowej analizy stanów granicznych ULS i SLS wykonanych modeli numerycznych stropu gęstożebrowego z żebrami żelbetowymi, w skład których wchodziło od jednej do pięciu belek strunobetonowych RS139, stosując rozpiętość stropu 6 – 15 m z krokiem co 10 cm, wyciągnięto następujące wnioski:

1) nośność żebra o rozpiętości 7,2 m z jedną belką RS139 stanowi 98,65% nośności dopuszczalnej. W przypadku dwóch belek RS139 w żebrach stropu maksymalna rozpiętość może wynosić 12,6 m, co stanowi 99,77% nośności dopuszczalnej. Stosując większą liczbę belek RS139 w żebrach stropu (trzy, cztery lub pięć), nośność jest zawsze zachowana bez względu na rozpiętość stropu w granicach 6 – 15 m (rysunek 4);

2) w artykule przedstawiono wynik końcowy tylko jednego wybranego stanu granicznego z uwagi na ścinanie jako stosunek obliczeniowej siły poprzecznej w żebrze V_{Ed} do obliczeniowej, granicznej siły poprzecznej w żebrze zespolonym $V_{Rd,c}$, w którym nie trzeba projektować zbrojenia na ścinanie. Stosunek sił $V_{Ed}/V_{Rd,c}$ w przypadku żebra o rozpiętości 7,8 m z jedną belką RS139 wynosi 99,70%. Przy rozpiętości większej niż 7,9 m należy dodatkowo zaprojektować zbrojenie na ścinanie w postaci prętów i strzemion. Przy dwóch do pięciu belkach w przekroju żebra stropu nie trzeba dodatkowo dozbierać żebra z uwagi na ścinanie (rysunek 5). W praktyce, przy projektowaniu stropów gęstożebrowych z belkami RS139 o dużej rozpiętości, stosuje się dodatkowo zbrojenie prętami $\phi 12$ w strefie ściskanej betonu nad belkami;

3) analizując stany graniczne użyteczności z uwagi na zarysowanie, wyznaczono stosunek charakterystycznego momentu zginającego $M_0 = M_{Ek}$ do momentu rysującego przekroju poprzecznego żebra stropu M_{cr} . Przy rozpiętościach 6 – 15 m żebra z jedną belką RS139, przekrój będzie zawsze zarysowany i w tym przypadku należy sprawdzić szerokość rozwarcia rys prostopadłych do osi elementu. W przypadku żeber z dwoma belkami przekrój zarysowany będzie występował od rozpiętości stropu 6,1 m, gdzie wartość M_0/M_{cr} wynosi 101,14%. Żebra zawierające trzy belki RS139 zostaną zarysowane od rozpiętości 7,2 m, co daje 101,24% wartości M_{cr} , żebra z czterema belkami RS139 zostaną zarysowane dopiero od rozpiętości 8,0 m, co stanowi 100,19% wartości M_{cr} , a przy pięciu belkach RS139 w żebrze, rozpiętość przekroju zarysowanego zwiększa się do 8,7 m, co daje 100,96% wartości M_{cr} . Wyniki analizy zarysowania przekroju żebra w stropie gęstożebrowym z belkami strunobetonowymi podano na rysunku 6;

4) analizując przekroje zarysowane żeber stropu z belkami RS139 pod kątem szerokości rozwarcia rys prostopadłych do osi elementu w_k stwierdzono, że w przypadku żeber z jedną belką RS139 maksymalna rozpiętość stropu wynosi 7,4 m, co stanowi 100,62% wartości dopuszczalnej rozwarcia rys $w_{lim} = 0,2$ mm. Żebra zawierające dwie belki RS139 można wykonać do 9,4 m rozpiętości, aby stosunek $w_k/w_{lim} = 99,71\%$. Żebra z trzema belkami RS139 i rozpiętości 10,6 m dają wartość $w_k/w_{lim} = 99,88\%$. Stosunek w_k/w_{lim} w przypadku żeber z czterema belkami RS139, przy rozpiętości 11,4 m, wynosi 99,66%. Stosując pięć belek RS139 w żebrach, można wyko-

5) the analysis of serviceability limit states due to deflections was performed based on the standards [11, 12], taking into account the use of assembly supports in the implementation stage, which support precast prestressed concrete beams RS139, giving an additional inverse arrow in the standards, marked as $f_{\text{mont}} = L_{\text{eff}}/300$. Taking into account the f_{mont} value, the final deflection of the rib of a densely ribbed ceiling is referred to as active deflection and is marked with the symbol f_a . The results of the analysis due to deflection are shown in Figure 8. A value of 0.0 means that the deflection of the beam has a negative value, i.e. there is an inverse arrow to the rib cross-section. For single RS139 beam fins, the ratio $f_a/f_{a,\text{dop}} = 99.20\%$ with a span of 8.2 m. The active deflection of a rib with two RS139 beams at a span of 12.3 m is 96.60% of the permissible value. The $f_a/f_{a,\text{dop}}$ ratio for a rib with three beams at a span of 14.9 m is 99.35%. When using four or five beams in the floor ribs, the deflection value for the tested spans of 6 – 15 m is always lower than the permissible value.

It is possible to use prestressed concrete beams with a large span (10 – 15 m) in the ribs of densely ribbed ceilings. If the ultimate or serviceability limit states are exceeded, minor adjustments can be made due to the materials, the amount of reinforcement in the supplementary concrete, or in the prestressed concrete beam itself. The most difficult condition to meet in densely ribbed ceilings with a large span is the SLS limit state, and above all deflection and cracking. Very often in projects, additional reinforcement in the form of meshes in the concrete is used, which, gives greater rigidity of the entire ceiling. In addition, additional reinforced concrete beams can be designed in the direction perpendicular to the axis of the ribs, which together with the ceiling ribs will form a grate fastened from the top with a reinforced concrete slab (concrete superstructure reinforced with steel meshes).

Received: 30.09.2024

Revised: 21.11.2024

Published: 20.12.2024

nać strop o rozpiętości 12 m. Wówczas stosunek $w_k/w_{\text{lim}} = 99,83\%$. Wyniki analizy z uwagi na zarysowanie przedstawiono na rysunku 7;

5) analizę stanów granicznych użyteczności z uwagi na ugięcia wykonano zgodnie z normami [11, 12], uwzględniając stosowanie podpór montażowych w stadium realizacji, które podpierają prefabrykowane belki strunobetonowe RS139, dając dodatkową strzałkę odwrotną w normach, oznaczoną jako $f_{\text{mont}} = L_{\text{eff}}/300$. Uwzględniając wartość f_{mont} , końcowe ugięcie żebra stropu gęstożebrowego jest określane jako ugięcie czynne i oznaczone symbolem f_a . Wyniki analizy z uwagi na ugięcie przedstawiono na rysunku 8. Wartość 0,0 oznacza, że ugięcie belki ma wartość ujemną, tzn. występuje strzałka odwrotna do przekroju żebra. W przypadku żeber z jedną belką RS139 stosunek $f_a/f_{a,\text{dop}} = 99,20\%$ przy rozpiętości 8,2 m. Ugięcie czynne żebra z dwoma belkami RS139 przy rozpiętości 12,3 m stanowi 96,60% wartości dopuszczalnej. Stosunek $f_a/f_{a,\text{dop}}$ dla żebra z trzema belkami przy rozpiętości 14,9 m wynosi 99,35%. Stosując cztery lub pięć belek w żebrach stropu, wartość ugięcia przy badanej rozpiętości 6 – 15 m jest zawsze mniejsza od wartości dopuszczalnej.

Możliwe jest stosowanie belek strunobetonowych o dużej rozpiętości (10 – 15 m) w żebrach stropów gęstożebrowych. W przypadku przekroczenia stanów granicznych nośności lub użyteczności można wprowadzić drobne korekty związane z materiałami, ilością zbrojenia w betonie uzupełniającym lub w samej belce strunobetonowej. Najtrudniejszym warunkiem do spełnienia w stropach gęstożebrowych o dużej rozpiętości jest stan graniczny SLS, a przede wszystkim ugięcie i zarysowanie. Bardzo często w projektach stosuje się dodatkowe zbrojenie w postaci siatek w nadbetonie, co m.in. daje większą sztywność całego stropu. Oprócz tego można zaprojektować dodatkowe belki żelbetowe w kierunku prostopadłym do osi żeber, które razem z żebrami stropu będą stanowiły ruszt spięty od góry płytą żelbetową (nadbeton zbrojony siatkami stalowymi).

Artykuł wpłynął do redakcji: 30.09.2024 r.

Otrzymano poprawiony po recenzjach: 21.11.2024 r.

Opublikowano: 20.12.2024 r.

Literatura

- [1] Bednarek JP. Historia rozwoju stropów gęstożebrowych. Fundacja PZITB. Przegląd Budowlany 2019; 2; 35 – 37.
- [2] Drobiec Ł. Rodzaje stropów stosowanych w budownictwie. Materiały Budowlane. 2008; 5: 2 – 4.
- [3] Pająk Z, Drobiec Ł. Zasady obliczeń stropów gęstożebrowych. XXXIII Ogólnopolska Konferencja Warsztat Pracy Projektanta Konstrukcji. Szczyrk 6 – 9 marca 2018 r. s. 239 – 293.
- [4] Pająk Z, Drobiec Ł. Stropy gęstożebrowe. XVIII Ogólnopolska Konferencja Warsztat Pracy Projektanta Konstrukcji. Ustroń 26 luty – 1 marca 2003 r. tom II, s. 229 – 300.
- [5] Starosolski W. Konstrukcje żelbetowe według Eurokodu 2 i norm związanych, tom 2, wydanie 13, Wydawnictwo PWN. Warszawa 2011.
- [6] PN-EN 1991-1-1: 2004 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje – Część 1-1: Oddziaływania ogólne. Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach.
- [7] Derkowski W, Surma M. Zespolecie w sprężonych stropach gęstożebrowych z belkami bez zbrojenia poprzecznego. Materiały Budowlane. 2011; 11; 10 – 14.

- [8] Musiał M, Grzymiski F, Pazdan M, Trapko T. Wybrane problem zginania żelbetowych stropów gęstożebrowych wg PN-EN 15037. Materiały Budowlane. 2022; 11; 116 – 118.
- [9] Musiał M, Grzymiski F, Pazdan M, Trapko T. Wybrane problem ugięć żelbetowych stropów gęstożebrowych wg PN-EN 15037. Materiały Budowlane. 2022; 11; 177 – 179.
- [10] Gąćkowski R. Tablice i algorytmy do wymiarowania zginanych elementów żelbetowych. VERLAG DASHOFER. Warszawa 2013.
- [11] PN-EN 1992-1-1:2008 Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [12] PN-EN 15037-1:2011 Prefabrykaty z betonu – Belkowo-pustakowe systemy stropowe. Część 1; Belki.
- [13] PN-EN 15037-2+A1:2011: Prefabrykaty z betonu. Belkowo-pustakowe systemy stropowe. Część 2: Pustaki betonowe.
- [14] PN-EN 15037-3:2009 Prefabrykaty z betonu – Belkowo-pustakowe systemy stropowe. Część 3: Pustaki ceramiczne.
- [15] PN-EN 13369:2005/A1:2008/AC:2008 Wspólne wymagania dla prefabrykatów betonowych.