

dr inż. Jacek Ścigallo¹⁾

ORCID: 0000-0001-8247-6501

dr hab. inż. Robert Studziński^{2)*)}

ORCID: 0000-0002-0906-8701

Rodzaje analiz globalnych prętowych konstrukcji żelbetowych

Types of global analysis of bar reinforced concrete structures

DOI: 10.15199/33.2024.03.01

Streszczenie. W artykule omówiono różne rodzaje analiz globalnych żelbetowych konstrukcji prętowych. Na przykładzie ramy żelbetowej porównano wyniki uzyskane z analiz oceny stanu granicznego nośności i użyteczności. W porównaniu uwzględniono cztery warianty analizy nieliniowej, a uzyskane wyniki odniesiono do powszechnie stosowanej analizy liniowo-sprężystej. We wszystkich analizach uwzględniono wpływ imperfekcji geometrycznych. Obliczenia numeryczne przeprowadzono w programie AxisVM.

Słowa kluczowe: żelbetowe ustroje prętowe; analiza globalna; nieliniowość geometryczna; efekty II rzędu; nieliniowość materiałowa.

Abstract. The paper discusses various types of global analysis for reinforced concrete structures. On the example of a reinforced concrete frame, the results were compared in the aspect of assessing the ultimate and serviceability limit states. Four types of nonlinear analysis were included in the comparison, and the results obtained were related to the linear-elastic analysis. The influence of geometric imperfections was taken into account in all analyses. Numerical calculations were performed in AxisVM.

Keywords: reinforced concrete rod structures; global analysis; geometric nonlinearity; second order effects; material nonlinearity.

Metody nieliniowych analiz globalnych żelbetowych konstrukcji prętowych [1, 2] wynikają z uwzględnienia geometrycznych efektów II rzędu (nieliniowość geometryczna) i/lub nieliniowego modelu materiałowego (nieliniowość fizyczna). Nieliniowy model materiałowy powinien uwzględniać wpływ rzeczywistego zbrojenia oraz zarysowania i czasu (pełzanie). Mówi o tym norma [3] w punkcie 5.8.6 opisująca metodę ogólną wymiarowania prętowych konstrukcji żelbetowych. Zapis w normie w aktualnym brzmieniu jest niestety bardzo ogólny. Nie podano żadnych parametrów ilościowych, które taka analiza globalna musiałaby spełniać. W konsekwencji większość programów do obliczeń inżynierskich nie ma zaimplementowanego sposobu wymiarowania elementów prętowych na podstawie metody ogólnej, a programy posiadające opracowane procedury i algorytmy nie wskazują jednoznacznie na spójność z tą metodą.

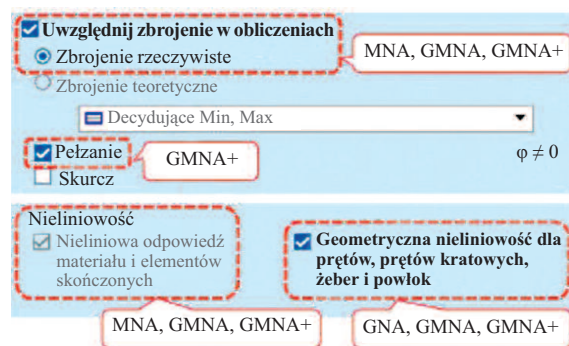
W artykule, na przykładzie ramy trzykondygnacyjnej, porównano wyniki stopnia wykorzystania zbrojenia słupów w przypadku sił wewnętrznych otrzymanych z analizy liniowej i czterech różnych wersji analizy nieliniowej. Wyniki analizy liniowej potraktowano jako referencyjne względem wyników analiz nieliniowych. Weryfikacja zbrojenia słupów została przeprowadzona jak dla elementu wydzielonego dla trzech hipotetycznych „ustawień” parametrów wymiarowania. Pierwsze ustawienie dotyczyło $\lambda \leq \lambda_{lim}$ ($e_{2,z} = 0$), drugie i trzecie $\lambda > \lambda_{lim}$ i powiązane było odpowiednio z $\beta = 1$ i $\beta > 1$, gdzie: λ – smukłość pręta w płaszczyźnie zginania,

λ_{lim} – smukłość graniczna w płaszczyźnie zginania, a β – współczynnik długości efektywnej słupa w zadanej płaszczyźnie zginania. We wszystkich analizach uwzględniono wpływ imperfekcji geometrycznych łukowych w przypadku elementów oraz przechyłowych dotyczących konstrukcji. Obliczenia statyczne i wymiarowanie przeprowadzono w programie AxisVM.

Rodzaje analiz

Podstawowy podział przyjętych w artykule nieliniowych analiz globalnych konstrukcji, możliwych do przeprowadzenia w programie AxisVM, przedstawiono na rysunku 1. Każdy z czterech wariantów globalnej analizy nieliniowej zakładał inny rodzaj nieliniowości:

- wariant I – geometrycznie nieliniowa analiza, GNA (ang. geometrically nonlinear analysis);
- wariant II – materiałowo-nieliniowa analiza, MNA (ang. *materially nonlinear analysis*);
- wariant III – geometrycznie i materiałowo nieliniowa analiza, GMNA



Rys. 1. Sposób uwzględnienia różnego rodzaju nieliniowości w analizie konstrukcji żelbetowych w programie AxisVM
Fig. 1. Method of including various nonlinearities in the analysis of reinforced concrete structures in AxisVM

¹⁾ Politechnika Poznańska, Wydział Architektury

²⁾ Politechnika Poznańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Transportu

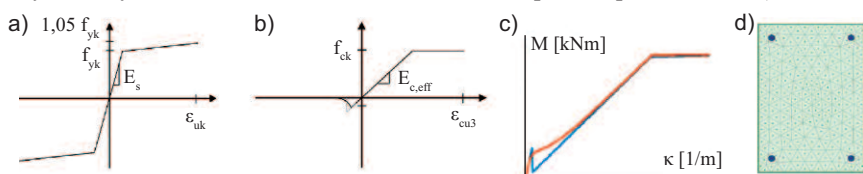
*) Adres do korespondencji:

robert.studzinski@put.poznan.pl

(ang. *geometrically and materially nonlinear analysis*);

• wariant IV – geometrycznie i materiałowo nieliniowa analiza z uwzględnieniem pełzania, GMNA+ (ang. *geometrically and materially nonlinear analysis with creep*).

Nieliniowość geometryczna to analiza II rzędu, natomiast nieliniowość materiałowa zakłada nieliniowy model fizyczny materiału z udziałem rzeczywistego zbrojenia. Wprowadzenie nieliniowości geometrycznej (analizy **G**) oznacza sytuację, w której równowaga sił wewnętrznych ustalana jest w odniesieniu do zdeformowanej geometrii układu działającymi obciążeniami, na którą składają się przemieszczenia węzłów (efekty $P-\Delta$) i ugięcia elementów (efekty $P-\delta$). W programie AxisVM obciążenia zachowują się w konserwatywny sposób, tzn. wraz ze zwiększającą się deformacją elementu zachowują swój pierwotny kierunek działania. Wprowadzenie nieliniowości materiałowej (analizy **M**) związane jest z uwzględnieniem w obliczeniach zbrojenia rzeczywistego oraz nieliniowego modelu fizycznego betonu i stali, które przyjęto zgodnie z wykresami pokazanymi na rysunku 2.



Rys. 2. Nieliniowe modele materiału, krzywizna i dyskretyzacja przyjęte w programie AxisVM [4]: a) stali; b) betonu; c) krzywizna $\kappa(M)$; d) dyskretyzacja przekroju żelbetowego

Fig. 2. Nonlinear material model, curvature and discretization introduced in AxisVM [4]: a) steel; b) concrete; c) curvature $\kappa(M)$; d) discretization of reinforced concrete cross-section

Celem uwzględniania nieliniowej odpowiedzi materiału w analizie nieliniowej II rzędu jest obliczenie dokładnych wartości ugięć elementów żelbetowych. Przekrój żelbetowy dyskretyzowany jest na trójkątne elementy skończone przypisane do przekroju betonowego oraz okrągłe elementy skończone przypisane do prętów zbrojenia podłużnego. Siły wewnętrzne, zgodne z odkształceniami, obliczane są przez numeryczne scałkowanie naprężeń we „włóknach” przekroju w punktach całkowania Gaussa na podstawie odkształceń normalnych ϵ oraz krzywizny κ_y i κ_z . Naprężenia we włóknach obliczane są na podstawie na-

prężenia w ich środku i bazują na nieliniowych modelach materiałowych betonu i stali zbrojeniowej. AxisVM stosuje klasyczną metodę iteracji Newtona-Raphsona do iteracyjnego rozwiązania każdego przyrostu, w której macierz sztywności układu aktualizowana jest w każdej iteracji.

Studium przypadku

W artykule omówiono **ramową konstrukcję żelbetową**. Przyjęto beton klasy C30/37 zbrojony stalą B500A. Analizowano trójkondygnacyjny układ ramowy, składający się z powtarzalnych kondygnacji o wysokości 4,5 m i rozpiętości 7,5 m. Geometrię układu oraz schematy i wielkość obciążeń hipotetycznych analizowanej ramy przedstawiono na rysunku 3.

W każdym wariantcie analizowana jest rama pośrednia, którą rozpatruje się w płaskim układzie (2D). Ze względu na symetrię geometrii, w celu przejrzystości analiz, rozpatrzono tylko po jednym przypadku obciążenia śniegiem i wiatrem. Do analizy przyjęto zatem 5 schematów obciążeń:

■ schemat 1 – ciężar własny konstrukcji i obciążenie stałe (liniowe od stropu i skupione od ścian);

■ schemat 2 – obciążenie użytkowe rygli pierwszej kondygnacji (liniowe od stropu);

■ schemat 3 – obciążenie użytkowe rygli drugiej kondygnacji (liniowe od stropu);

■ schemat 4 – obciążenie śniegiem (liniowe ze stropodachu);

■ schemat 5 – obciążenie wiatrem (liniowe na ściany).

We wszystkich przeprowadzonych analizach uwzględniono niekorzystny wpływ możliwych odchyłek geometrycznych konstrukcji od zaplanowanego kształtu i zmiany położenia obciążeń, wprowadzając imperfekcje łukowe elementów i przechyłowe konstrukcji. Zgodnie z normą [3] wprowadzenie imperfekcji geometrycznych wymaga określenia wartości podstawowej przechyły θ_0 , współczynnika redukcyjnego ze względu na wysokość obiektu α_h i współczynnika redukcyjnego ze względu na liczbę słupów α_m :

$$\theta_0 = 1/200; \alpha_h = 2/\sqrt{l} \quad (2/3 \leq \alpha_h \leq 1,0);$$

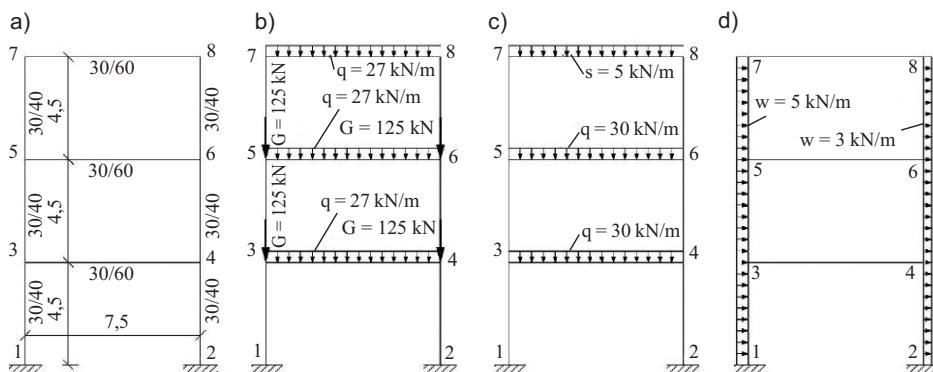
$$\alpha_m = \sqrt{0,5(1 + 1/m)} \quad (1)$$

gdzie:

l – długość lub wysokość w zależności czy odnosimy ją do elementu wydzielonego ($l = 4,50$ m) czy do całego układu ramowego ($l = 13,5$ m);
 m – liczba elementów pionowych wpływających na rozpatrywany efekt elementu wydzielonego ($m = 1$) oraz układu ramowego ($m = 6$).

Imperfekcje przechyłowe całego układu ramowego uwzględniono w analizach globalnych jako wymuszone przemieszczenia węzłów układu ramowego, wynikające z kąta pochylenia θ_i :

$$\theta_i = \theta_0 \alpha_h \alpha_m \quad (2)$$



Rys. 3. Żelbetowa rama trójkondygnacyjna: a) geometria; b) obciążenie stałe; c) obciążenie zmienne pionowe (3 schematy); d) obciążenie zmienne poziome (jeden schemat w kierunku przechyłu układu)

Fig. 3. Reinforced concrete three-storey frame: a) geometry; b) dead load; c) vertical variable load; d) horizontal variable load (one scheme in the direction of the initial tilt of the system)

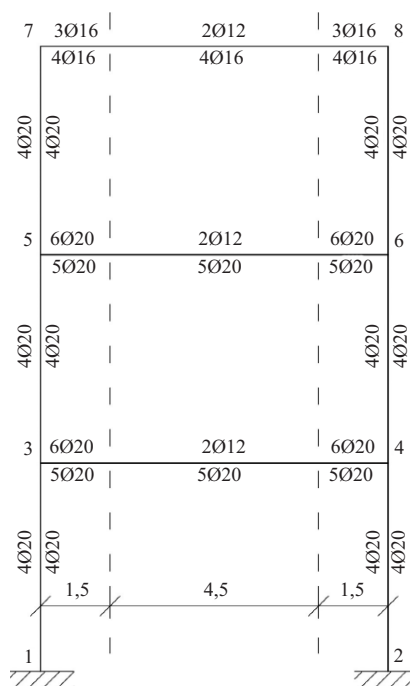
Przechył wprowadzono jako „fizyczne pochylenie” konstrukcji i jego efekt będzie uwzględniony w wynikach statyki wszystkich rozpatrywanych analiz. Z tego powodu na etapie wymiarowania zbrojenia i sprawdzania nośności elementu wydzielonego uwzględniono tylko imperfekcję łukową jako dodatkowy mimośród e_i , zwiększający wartość mimośrodu statycznego uzyskanego z danej analizy:

$$e_i = 0,5\theta_1 l_i \quad (3)$$

W równaniu (3) norma standardowo nakazuje przyjęcie długości efektywnej l_0 zamiast długości elementu wydzielonego l . W związku z tym, że we wszystkich analizach globalnych wprowadzono imperfekcje przechyłowe, przyjmuje się długość elementu wydzielonego l , aby nie dublować efektów przechyłowości układu.

Ilość wymaganego zbrojenia elementów rygli i słupów analizowanego układu ramowego obliczono na podstawie wartości sił wewnętrznych wyznaczonych z podstawowej analizy liniowej z uwzględnieniem **imperfekcji geometrycznych**. W obliczeniach zbrojenia elementów przyjęto metodę nominalnej krzywizny. Na podstawie obliczeniowo wymaganej ilości zbrojenia ($A_{s, req}$) dobrano projektowe zbrojenie przekroju ($A_{s, prov}$) w funkcji średnicy prętów zbrojeniowych (rysunek 4). W przypadku przyjętego zbrojenia dodatkowo obliczono nośności przekrojów oraz odpowiedni poziom procentowego ich wyętnienia. Przeprowadzono cztery warianty analizy nieliniowej dla tak wyznaczonego zbrojenia. Wyniki wykonanych analiz nieliniowych przedstawiono w formie poziomu wyętnienia poszczególnych przekrojów miarodajnych elementów analizowanego układu ramowego. Uzyskane wyniki odniesiono do rezultatów podstawowej analizy liniowej.

W celu poprawnego wyznaczenia wpływu efektów II rzędu w przypadku elementów wydzielonych, kluczowe jest określenie ich długości efektywnej (l_0) oraz wielkości maksymalnej krzywizny ($1/r$) w przypadku zastosowania metody nominalnej krzywizny lub określenie wielkości siły krytycznej (N_B) w metodzie nominalnej sztywności [5 – 8]. Odpo-



Rys. 4. Zbrojenie główne wyznaczone z analizy liniowej (LA)

Fig. 4. Main reinforcement determined from linear analysis (LA)

wiednie długości efektywne (l_0) nieusztynionych elementów wydzielonych, które należy indywidualnie wprowadzić do programu AxisVM, wyznaczono ze wzoru podanego w [3], wg równania (4):

$$l_0 = \max \left\{ \sqrt{1 + 10 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}} \right\} \cdot l = \beta_i \quad (4)$$

gdzie:

k_1 i k_2 – wartości względnej podatności podpór ograniczającej obrót na końcach elementu;
 β – współczynnik długości efektywnej (wybozeniowy) słupa w analizowanej płaszczyźnie zginania.

Wartości współczynników wybozeniowych β wyznaczono niezależnie dla liniowego i nieliniowego modelu fizycznego materiału. Przyjęto następujące wartości β poszczególnych słupów, licząc od dolnej kondygnacji: w przypadku liniowego modelu materiałowego – $\beta = 1,21; 1,19; 1,23$, a nieliniowego modelu materiałowego – $\beta = 1,28; 1,29; 1,33$.

Parametry elementu wydzielonego

Parametry wszystkich analiz w przypadku słupa dolnej kondygnacji zestawiono w tabeli 1.

Wyniki analiz

Wyniki nieliniowych, globalnych analiz obliczeniowych oraz odpowiedniej analizy liniowej wykonanych w programie AxisVM zamieszczono w tabeli 2. Zawierają one poziomy wyętnienia [%] wybranych słupów analizowanego układu ramowego oraz wielkości maksymalnych przemieszczeń poziomych ramy, wyznaczonych na potrzeby poszczególnych rodzajów analiz. Podane wyniki odniesiono do odpowiednich wartości uzyskanych ze standardowej analizy liniowej (LA) powszechnie stosowanej w praktyce inżynierskiej, w przypadku której uwzględniono wpływy imperfekcji łukowych i przechyłowych oraz smukłości i obciążeń długotrwałych elementów wydzielonych. W celu pełniejszego zobrazowania i porównania wpływu poszczególnych rodzajów analiz na wartości wyników, każdą analizę wykonano trzywariantowo, a mianowicie: jak w przypadku elementu krępego ($\lambda \leq \lambda_{lim}$) bez uwzględnienia wpływu smukłości oraz z uwzględnieniem wpływu smukłości dla elementu nieusztynionego ($\beta > 1$) oraz elementu usztynionego ($\beta = 1$). Taki schemat działań zrealizowano w celu odniesienia uzyskanych wyników do wykonanych analiz. Jest sprawą oczywistą, że globalna analiza liniowa I rzędu (LA), bez uwzględnienia wpływu smukłości elementów wydzielonych może dać wyniki znacznie niedoszacowane. Z kolei wykonanie pełnej analizy nieliniowej II rzędu (GMNA+) z dodatkowym uwzględnieniem wpływu smukłości elementów wydzielonych może dać (w zależności od ich smukłości) wyniki znacznie przeszacowane. Sprawdzenie kryterium uproszczonego zasadności uwzględniania efektów II rzędu w przypadku elementów wydzielonych wykazało, że istnieje konieczność uwzględnienia wpływu smukłości i obciążeń długotrwałych. Sprawdzenie kryterium globalnego zasadności uwzględniania efektów II rzędu w przypadku całej konstrukcji wykazało, że nie ma konieczności wykonania takiej analizy, co wyraźnie widać, analizując wyniki analiz zamieszczonych w tabeli 2. Na rysunkach 5 i 6 przedstawiono odpowiednie wykresy przemieszczeń poziomych ramy i rozkładu momentów zginających

otrzymanych w wyniku przeprowadzonych analiz globalnych. Nośność odniesiono do powierzchni krytycznych, które mogą być wyznaczane w ramach róż-

nych metod [9 – 11]. Metody wymiarowania smukłych słupów dwukierunkowo zginanych i ściskanych opisano w [12], a wpływ efektów II rzędu – w [13].

Tabela 1. Parametry wymiarowania elementu wydzielonego (słupa kondygnacji dolnej)
 Table 1. The dimensioning parameters of the isolated element (column of the lower storey)

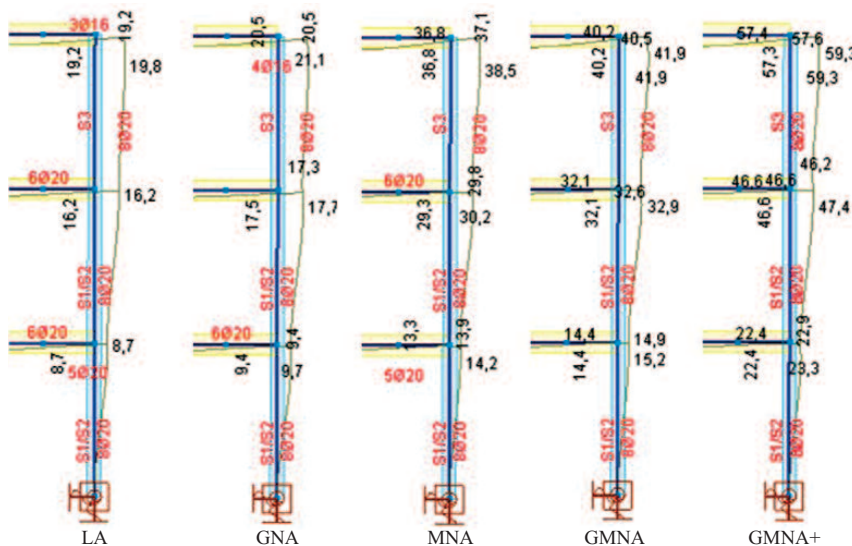
Wariant analizy		LA	GNA	MNA	GMNA	GMNA+	
Imperfekcja przechylenia u_x całego układu	kąt pochylenia $\theta_i = \theta_0 \alpha_n \alpha_m$	$1/200 \cdot 2/3 \sqrt{0,5(1 + 1/6)} = 0,002546 \text{ rad}$					
	przechyl górniego węzła $u_x = 1 \cdot \theta_i$	$13,5 \cdot 0,002546 = 0,034 \text{ m}$					
Imperfekcja łukowa $e_{1,z}$ elementu wydzielonego	dla elementu wydzielonego $e_{1,z} = 0,5\theta_i \cdot l_i$	$0,5 \cdot 1/200 \cdot 2/\sqrt{4,5} \sqrt{0,5(1 + 1/1)} \cdot 4,5 = 0,011 \text{ m}$					x
Mimośród II rzędu $e_{2,z}$ elementu wydzielonego	współczynnik wyobczeniowy β	1,0/1,21	1,0/1,21	1,0/1,28	1,0/1,28	x	
	$\lambda \leq \lambda_{lim}$	$\beta = 1$	0,000 m	0,000 m	0,000 m	0,000 m	0,000 m
		$\beta > 1$	0,036 m	0,036 m*	0,039 m*	0,039 m*	x
$\lambda > \lambda_{lim}$	$\beta = 1$	0,049 m*	0,049 m	0,058 m	0,058 m	x	

* zaznaczono preferowane ustawienie parametrów wymiarowania słupa w danej analizie globalnej

Tabela 2. Wyniki przeprowadzonych analiz

Table 2. Results of the analyses

nr	Analiza		Poziom wyćężenia słupa w przypadku kondygnacji [%]			Maksymalne przemieszczenie układu [mm]
	rodzaj	parametr	1	2	3	
0	LA	$\beta > 1$	98,6	100,3	90,1	19,50
		$\beta = 1$	94,3	96,8	84,5	
		$\lambda \leq \lambda_{lim}$	78,9	83,5	83,4	
1	GNA	$\beta > 1$	99,3	101,5	90,2	20,52
		$\beta = 1$	95,0	97,8	84,6	
		$\lambda \leq \lambda_{lim}$	79,7	84,4	83,6	
2	MNA	$\beta > 1$	112,1	114,6	97,4	37,14
		$\beta = 1$	104,0	107,8	91,5	
		$\lambda \leq \lambda_{lim}$	87,4	92,9	90,5	
3	GMNA	$\beta > 1$	113,6	117,3	97,9	41,91
		$\beta = 1$	105,4	110,4	92,0	
		$\lambda \leq \lambda_{lim}$	88,4	94,9	91,0	
4	GMNA+	$\lambda \leq \lambda_{lim}$	87,7	94,4	92,8	57,60



Rys. 5. Pola przemieszczeń poziomych (e_x) wyznaczonych za pomocą różnych analiz
 Fig. 5. Horizontal (e_x) displacement fields determined by various analyses

Na rysunku 7 przedstawiono wpływ ustawienia parametrów wymiarowania elementu wydzielonego na normowy warunek nośności granicznej słupa, wyznaczonej w różnych analizach: „1” (słupek niebieski) odnosi się do przypadku $\beta > 1$, „2” (słupek pomarańczowy) do przypadku $\beta = 1$, a „3” (słupek szary) do przypadku $\lambda \leq \lambda_{lim}$.

Podsumowanie

Do analizy wpływów II rzędu norma [3] przewiduje stosowanie metody ogólnej lub odpowiednio skalibrowanych metod uproszczonych. Metoda ogólna, z zastosowaniem MES, uwzględnia związki konstytutywne w przypadku żelbetu w fazie zarysowanej oraz wpływy reologiczne. W środowisku projektantów konstrukcji budowlanych dostępność zaawansowanych programów do analiz numerycznych, dających pełną możliwość definiowania związków konstytutywnych, jest ograniczona. Istniejące programy do obliczeń inżynierskich zazwyczaj nie pozwalają na przeprowadzenie pełnej analizy ogólnej konstrukcji żelbetowych lub ze względu na brak precyzyjnie sformułowanych wytycznych normowych nie rozwiązują wszystkich problemów. Inaczej wygląda sprawa z dostępnością programów do analiz II rzędu bazujących na fizycznym modelu ciała liniowo-sprężystego. Programy te można wykorzystać do analizy nieliniowej geometrycznie konstrukcji żelbetowych w przypadku poprawnego oszacowania sztywności poszczególnych elementów układu.

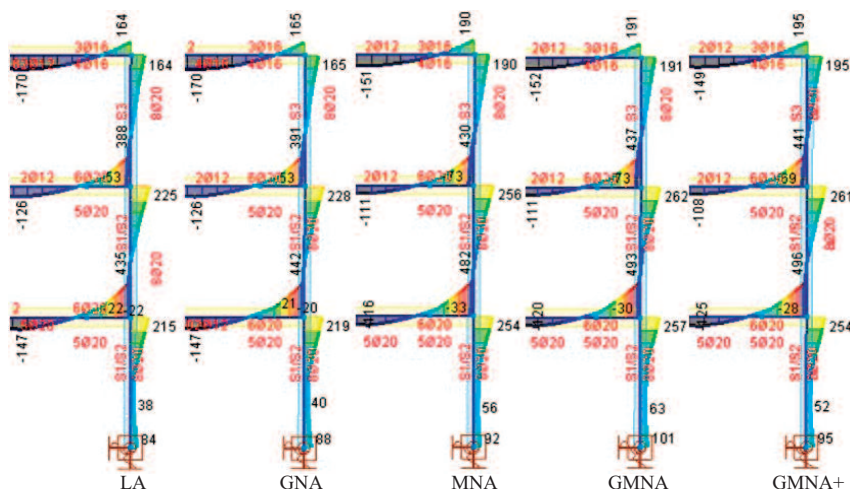
Norma żelbetowa [3] wprowadza dwa kryteria pozwalające na określenie konieczności uwzględniania efektów II rzędu. Pierwsze, bardzo ogólne kryterium odnoszące się zarówno do elementów wydzielonych, jak i całej konstrukcji mówi, że efekty drugiego rzędu można pominąć, jeżeli wynoszą one mniej niż 10% odpowiednich efektów pierwszego rzędu. Pierwsze kryterium jest na tyle ogólne, że aby z niego skorzystać, należy najpierw wykonać analizę drugiego rzędu i dopiero na podstawie uzyskanych wyników można dokonać oceny konieczności wykonania analizy II rzędu. Bardziej praktyczne są kryteria uproszczone sformułowane niezależnie w przypadku elementów wydzielonych oraz globalnej analizy konstrukcji. Kryterium uprosz-

czone dotyczące elementów wydzielonych jest dosyć proste i polega na porównaniu wielkości smukłości λ analizowanego elementu z wielkością graniczną λ_{lim} . Z kolei globalne efekty II rzędu w budynkach można pominąć, jeżeli spełnione jest kryterium porównujące wielkość całkowitych obciążeń pionowych ($F_{V,Ed}$) z wielkością granicznej siły

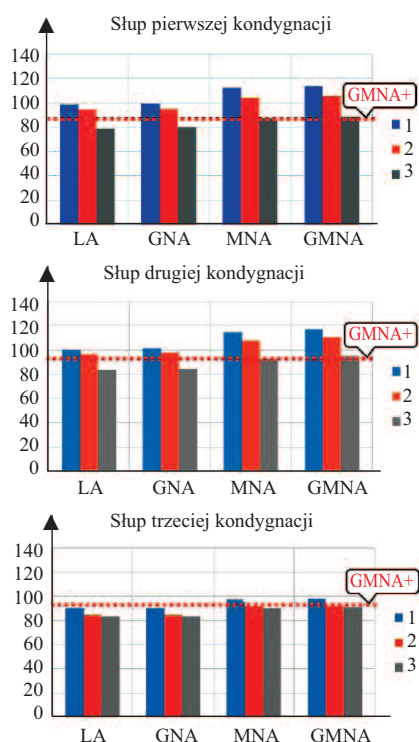
($F_{V,lim}$), zależnej od sztywności i wysokości całego budynku. Stosowanie uproszczonego kryterium globalnego ma jednak wiele ograniczeń związanych z geometrią i symetrią układu konstrukcyjnego i nie zawsze można je zastosować.

Zawarte w tabeli 2 wyniki pokazują, jak duże znaczenie w analizie konstrukcji ma uwzględnienie zmniejszonej

nierskiej analiza I rzędu dla liniowo-sprężystego modelu materiałowego, z uwzględnieniem efektów II rzędu tylko na poziomie wymiarowania przekrojów elementów wydzielonych jest dość zachowawcza. Daje ona z reguły zawyżone wyniki w porównaniu z uzyskanymi z pełnej, globalnej analizy nieliniowej (GMNA+). Różnice te wyraźnie zależą od udziału siły ściskającej N w wyęźnieniu przekroju. Im większy jest udział siły N w poziomie wyęźnieniu przekroju danego elementu, tym różnice są większe.



Rys. 6. Rozkład momentów zginających (M_y) wyznaczonych za pomocą różnych analiz
Fig. 6. Bending moment (M_y) diagrams determined by various analysis



Rys. 7. Poziomy wyęźnienia słupów poszczególnych kondygnacji w przypadku sił wewnętrznych wyznaczonych za pomocą różnych analiz

Fig. 7. Utilization of columns of individual floors for internal forces determined using different analyses

sztywności prętów żelbetowych (z uwagi na ich zarysowanie) w stosunku do wartości wyjściowych stosowanych w analizie liniowo-sprężystej. Okazuje się, że ten wpływ może być większy od dodatkowych przyrostów momentów związanych z efektami II rzędu. Podstawowy wniosek wynikający z analiz jest taki, że w przypadku konstrukcji żelbetowych, przeprowadzanie analiz nieliniowych geometrycznie dla liniowo-sprężystego modelu materiału nie ma większego sensu. Wykonanie pełnej analizy konstrukcji żelbetowych z zastosowaniem metody ogólnej pozwala na uzyskanie pewnych, realnych oszczędności. Rezerwy nośności, wynikające z zastosowania zaawansowanej metody obliczeniowej, przedstawiono ilościowo za pomocą stopnia wyęźnienia przekrojów żelbetowych słupów ramy trzykondygnacyjnej (rysunek 7). Z przeprowadzonej analizy nośności przykładowego układu ramowego wynika, że im większy udział siły ściskającej w poziomie wyęźnienia przekroju analizowanego elementu, tym uzyskujemy większe efekty z zastosowania pełnej analizy nieliniowej (GMNA+). Okazuje się, że powszechnie stosowana w praktyce inżyn-

Literatura

[1] PN-EN 1990:2004 Eurokod – Podstawy projektowania konstrukcji.
 [2] Praca zbiorowa Sekcja Konstrukcji Betonowych KILiW PAN. Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2006.
 [3] PN-EN 1992-1-1:2008 Eurokod 2 Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
 [4] Podręcznik użytkownika AxisVM X7, https://gammacad.pl/app/uploads/acf-uploads/axisvm_x7_podrecznik.pdf, dostęp 12.12.2023.
 [5] Knauff M. Obliczanie konstrukcji żelbetowych według Eurokodów 2. Wydawnictwo Naukowe 2018 PWN SA, ISBN 978-83-01-19987-6.
 [6] Pędziwiatr J. Efekty drugiego rzędu – porównanie metod obliczeniowych. Materiały Budowlane. 2017; DOI: 10.15199/33.2017.06.18.
 [7] Pędziwiatr J, Musiał M. Calculation of second-order effects in columns – applications and examples, Archives of Civil Engineering. 2023; DOI: 10.24425/ace.2023.144173.
 [8] Ścigałło J. Praktyczne algorytmy do projektowania żelbetowych przekrojów mimośrodowo ściskanych na podstawie wymagań Eurokodu 2. Materiały Budowlane. 2014; 4: 68 – 69.
 [9] Pannell FN. The Design of Biaxially Loaded Columns by Ultimate Load Method. Magazine of Concrete Research, London, 1960, 103 – 104.
 [10] Bresler B. Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending. ACI Journal, Proceedings. 1960; 57: 481 – 490.
 [11] Ramamurthy LN. Investigation of the Ultimate Strength of Square and Rectangular Columns under Biaxially Eccentric Loads. Symposium on Reinforced Concrete Columns, American Concrete Institute, Detroit, MI, 1966, 263 – 298.
 [12] Bouchaboub M, Sama ML. Nonlinear analysis of slender high-strength R/C columns under combined biaxial bending and axial compression. Engineering Structures. 2013; DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.08.030.
 [13] de Araújo JM. Comparative study of the simplified methods of Eurocode 2 for second order analysis of slender reinforced concrete columns. Journal of Building Engineering. 2017; DOI: 10.1016/j.job.2017.10.003.

Badania zrealizowano w ramach projektów 0111/SBAD/2412 i 0412/SBAD/0080 Politechniki Poznańskiej.

Przyjęto do druku: 13.02.2024 r.