

dr inż. Magdalena Sosnowska^{1*)}

ORCID: 0000-0002-1158-5943

dr inż. Magdalena Lachowicz¹⁾

ORCID: 0000-0003-4047-2769

prof. dr hab. inż. Adam Podhorecki¹⁾

ORCID: 0000-0002-9569-1769

Uogólnienie zasady Hamiltona na zagadnienie termodyfuzji sprzężonej

Generalization of Hamilton's principle for the problem of coupled thermodiffusion

DOI: 10.15199/33.2024.02.04

Streszczenie. Zmienna w czasie temperatura i stężenie substancji dyfundującej powodują deformację ciała stałego. Istnieje również proces odwrotny, czyli odkształcenie ciała stałego powoduje wytworzenie energii cieplnej oraz przepływ masy. Wymienione procesy są ze sobą sprzężone, a badaniem tego sprzężenia zajmuje się termodyfuzja. W artykule rozpatrzono zagadnienie początkowo-brzegowe ośrodka ciągłego, geometrycznie i fizycznie liniowego, przy umiarkowanej zmianie temperatury i stężenia substancji dyfuzyjnej. Zagadnienie takie można opisać za pomocą sprzężonych równań różniczkowych, rozszerzonego równania przewodnictwa cieplnego, rozszerzonego równania dyfuzji i równań teorii sprężystości uzupełnionych o warunki brzegowe i początkowe. W artykule wykazano, że równanie czasopracy wirtualnej, wyprowadzone na bazie równań różniczkowych, prowadzi do uogólnienia zasady Hamiltona. Równania czasopracy wirtualnej i zasady Hamiltona nie da się wyrazić w postaci minimum dobrze zdefiniowanego funkcjonału. Wiadomo, że takie sformułowanie pozwala na zastosowanie metod bezpośrednich. Łatwo wykazać, że z przedstawionej zasady wariacyjnej można wyprowadzić równania sprężystości, przewodnictwa cieplnego i dyfuzji.

Słowa kluczowe: zasada Hamiltona; sprzężona termodyfuzja; mechanika ośrodków ciągłych; termodynamika procesów nieodwracalnych.

Abstract. Variables in time of temperature field and concentration of diffusion substance field cause deformation of the solid. There is also a reverse process, i.e., deformation of the solid causes thermal energy (and its conduction) and mass flow. The mentioned processes are coupled together and thermodiffusion deals with the study of this coupling. In the paper the problem of initial – boundary of the continuous center with moderate temperature change and moderate change in concentration of diffusion substance was considered. Such an issue can be written with conjugate differential equations, extended thermal, diffusion and the theory of elasticity equations supplemented with boundary and initial conditions. It is possible to describe such an issue by the integral form using for this purpose the above differential equations and the equation of a virtual power in the space–time domain. It has been shown in the work that the equation of a virtual power, derived from the above differential equations, actually leads to the generalized Hamilton's principle. The equation of a virtual power and Hamilton's principle in the form shown in the work cannot be expressed as a minimum of a well-defined functional. It is known, that such formulation allows the use of direct methods. It is easy to show that the elasticity, thermal conductivity and diffusion equations can be obtained from the presented variation principle.

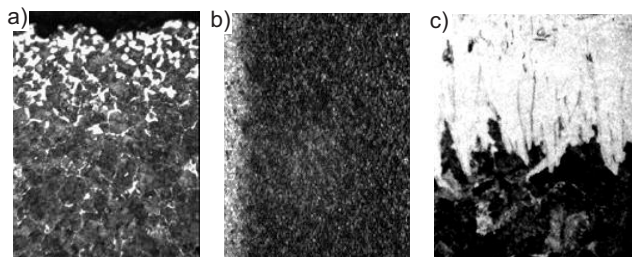
Keywords: Hamilton's principle; coupled thermodiffusion; mechanics of continuous medium; thermodynamics of irreversible processes.

Uogólnieniem zasady minimum energii potencjalnej w przypadku liniowej dynamiki jest zasada Hamiltona [1]. Uogólnienie to w istocie polega na zbudowaniu funkcjonału i następnie na żądaniu, aby ten funkcjonał spełniał wymagane warunki minimum. Można również pominąć etap budowania funkcjonału, korzystając przez analogię z zasady pracy wirtualnej, nazywanej zasadą czasopracy wirtualnej [1, 2]. Tematykę rozszerzenia zasady Hamiltona poruszano także w innych pracach, np. [3 – 7].

Termodyfuzja, jako dział mechaniki ciała stałego, obejmuje badania nad sprzężeniem pola deformacji, temperatury i stężenia substancji dyfundującej. W dziedzinie inżynierii lądowej wyróżnić można wiele zjawisk z zakresu termodyfuzji. Praktycznym przykładem jest powierzchniowa obróbka cieplno-chemiczna, np. przez azotowanie, nawęglanie, czy borowanie (fotografia). W warunkach podwyższonej temperatury

¹⁾ Politechnika Bydgoska, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

^{*} Adres do korespondencji: magdalena.sosnowska@pbs.edu.pl



Przebieg różnych procesów obróbki cieplno-chemicznej; warstwa dyfuzyjna złożona z: węgla (a); azotu (b); borków żelaza (c) uzyskana na płycie stalowej [<http://www.labmat.pw.plock.pl>]

The progress of various thermo-chemical treatment processes; diffusion layer composed of: carbon (a); nitrogen (b); iron boride (c) obtained on a steel plate [<http://www.labmat.pw.plock.pl>]

zachodzi wówczas termodyfuzja jednostronna, tj. dyfuzja gazu do ciała stałego. Do obróbki powierzchniowej metali stosuje się również różnego typu powłoki. Wówczas zachodzi proces dyfuzji wzajemnej. W jednym i w drugim przypadku poznanie złożonych procesów transportowych pozwala

ła na uzyskanie lepszych właściwości wierzchniej warstwy ochronnej. Umożliwia to optymalizację parametrów mechanicznych i chemicznych tych materiałów, a także prognozowanie ich trwałości.

W budownictwie znaczącą grupę zjawisk z zakresu termodyfuzji stanowią procesy ciepło-wilgotnościowe, które są domeną fizyki budowli. Przepływ wilgoci i ciepła przez przegrody budowlane jest w dobie racjonalizowania zużycia energii jednym z głównych problemów projektowych i wykonawczych, interesujących inżynierów budownictwa. Dyfuzyjny przepływ pary wodnej może wpływać na wiele niekorzystnych zjawisk, jak np. korozja biologiczna i chemiczna, co w znaczący sposób pogarsza właściwości fizyko-mechaniczne materiałów.

Poznanie złożonych procesów przepływu masy i ciepła pozwala również na modelowanie zachowania się konstrukcji w sytuacjach wyjątkowych, takich jak pożar, powódź, czy awaria nuklearna. Reakcja elementów konstrukcyjnych na zwiększanie temperatury otoczenia ma również znaczenie podczas oceny ich odporności ogniowej. Wahający się zakres temperatur wpływa na cechy fizyczne materiału oraz wody (lub pary wodnej). W materiale porowatym, modyfikacjom ulega również wewnętrzna struktura porów i w efekcie zmieniają się jego podstawowe właściwości. W przypadku betonu podlega on dodatkowo dehydratacji, co uwidacznia się w postaci upustu ciepła i źródeł wody swobodnej.

Niekontrolowana termodyfuzja może mieć bardzo negatywne skutki. Przykładem jest zachowanie się drewna w atmosferze o dynamicznie zmieniającej się wilgotności. Na skutek wysychania materiału dochodzi do skurczu, a konsekwencją niejednorodnego rozkładu wilgoci wewnątrz elementu jest powstanie odkształceń i naprężeń. Jeżeli dyfuzja zachodzi powoli, rozkład wilgoci wewnątrz elementu można uznać za równomierny i materiał jest pozbawiony wewnętrznych naprężeń suszarniczych. Modelowanie rozkładu wilgoci w suszonym materiale lub symulacja zjawisk zachodzących w procesie suszenia pozwala zidentyfikować te fazy suszenia, w których może dojść do niepożądanych konsekwencji.

W artykule dokonano uogólnienia zasady Hamiltona na przypadek termodyfuzji sprzężonej w odkształcalnych ciałach stałych. Wykazano, że równanie czasopracy wirtualnej prowadzi do uogólnienia zasady Hamiltona.

Zagadnienie początkowo-brzegowe termodyfuzji w ciałach stałych

Rozpatruje się ciało stałe zajmujące obszar \mathcal{B} z powierzchnią graniczną $\partial\mathcal{B}$. Ruch badano w przedziale czasu $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Ciało w stanie niezdeformowanym i beznaprężeniowym znajduje się w stałej temperaturze $T_0 = T(\mathbf{X}, 0)$ i charakteryzuje się stałym stężeniem substancji dyfundującej $C_0 = C(\mathbf{X}, 0)$. Pod wpływem oddziaływań zewnętrznych lub/i wewnętrznych ciało dozna przemieszczeń $u_i(\mathbf{X}, t)$, odkształceń $\varepsilon_{ij}(\mathbf{X}, t)$, powstaną naprężenia $\sigma_{ij}(\mathbf{X}, t)$, temperatura zmieni się o $\theta(\mathbf{X}, t)$, a stężenie substancji dyfundującej o $c(\mathbf{X}, t)$. Analizuje się ośrodek ciągły, przy niewielkich zmianach temperatury i stężenia substancji dyfundującej.

W celu wyprowadzenia równań opisujących analizowane zagadnienie rozwinięto funkcję energii swobodnej Helmholtza w szereg potęgowy Taylora w otoczeniu stanu naturalnego, a następnie zróżniczkowano względem odkształceń:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\varepsilon_{ij}, T, C)}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + \\ &+ \frac{\partial^2 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} (T - T_0) + \frac{\partial^2 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial C} (C - C_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn}} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T^2} (T - T_0)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial C^2} (C - C_0)^2 + 2 \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial T} \varepsilon_{kl} (T - T_0) + \right. \\ &+ \left. 2 \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial C} \varepsilon_{kl} (C - C_0) + \right. \\ &+ \left. 2 \frac{\partial^3 F(0, T_0, C_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial C \partial T} (C - C_0) (T - T_0) \right] + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Uwzględniając przyjęte założenia w stanie naturalnym (naprężenia i odkształcenia są zerowe) oraz wprowadzając stosowane oznaczenia, otrzymuje się następującą zależność:

$$\frac{\partial F(\varepsilon_{ij}, \theta, c)}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \alpha_{ij} \theta - \beta_{ij} c + \dots \quad (2)$$

Ze względu na założenie o infinitezmalnych odkształceniach, małym względnym przyroście temperatury oraz małym przyroście stężenia substancji dyfundującej, można w zależności (2) pominąć wielkości wyższego rzędu, uzyskując następującą postać równania konstytutywnego termodyfuzji:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \alpha_{ij} \theta - \beta_{ij} c \quad (3)$$

gdzie:

C_{ijkl} – składowa tensora opisującego parametry materiałowe związane z mechanicznymi właściwościami materiału;

α_{ij} – składowa tensora opisującego parametry materiałowe związane z mechanicznymi i termicznymi właściwościami materiału;

β_{ij} – składowa tensora opisującego parametry materiałowe związane z mechanicznymi i dyfuzyjnymi właściwościami materiału.

Warto zaznaczyć, że w przypadku jednorodnego ciała izotropowego zależność (3), po uwzględnieniu wspomnianych założeń, przyjmie postać:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda e - \gamma_T \theta - \gamma_C c) \delta_{ij} \quad (4)$$

gdzie:

μ [N/m²], λ [N/m²], γ_T [N/m²], γ_C [Nm/kg] – stałe materiałowe;

δ_{ij} – delta Kroneckera.

Równania równowagi, opisujące zależność pomiędzy naprężeniami, siłami masowymi i siłami bezwładności, można natomiast zapisać w następujący sposób:

$$\sigma_{ij,i} + \rho f_j - \rho \ddot{u}_j = 0 \quad (5)$$

gdzie:

ρ – gęstość objętościowa ciała [kg/m³].

Wykorzystując pierwszą i drugą zasadę termodynamiki, równanie bilansu entropii oraz związku Onsagera dotyczące laminarnych przepływów termodynamicznych, można następnie wyprowadzić rozszerzone równania przewodnictwa cieplnego i dyfuzji w postaci:

$$k \theta_{,ii} - \dot{\theta}_{c,c} - T_0 (\gamma_T \dot{e} + b \dot{c}) + W = 0 \quad (6)$$

gdzie:

k [W/mK], $c_{e,c}$ [J/Km³], γ_T [N/m²K], b [J/kgK] – stałe materiałowe;

W [W/m³] – wydajność wewnętrznych źródeł ciepła.

$$D_T \theta_{,ii} + D_c e_{,ii} + D_c c_{,ii} - \dot{c} + \tau = 0 \quad (7)$$

gdzie:

D_T [kg/msK], D_c [kg/ms], D_c [m²/s] – stałe materiałowe;
 τ [kg/m³·s] – wydajność wewnętrznych źródeł masy.

Uzupełnieniem tych równań są warunki początkowe i brzegowe, które można zapisać w następującej postaci:

- warunki początkowe:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}, t) &= u_{0i}(\mathbf{X}, t); \\ \dot{u}_i(\mathbf{X}, t) &= \dot{u}_{0i}(\mathbf{X}, t); \\ T(\mathbf{X}, t) &= T_0(\mathbf{X}, t); \\ C(\mathbf{X}, t) &= C_0(\mathbf{X}, t); \\ (\mathbf{X}, t) &\in \mathcal{B}_0 \times \{0\}; \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (8)$$

- warunki brzegowe typu statycznego:

$$\begin{aligned} \hat{p}_i(\mathbf{X}, t) &= \sigma_{ji}(\mathbf{X}, t) n_j; \\ (\mathbf{X}, t) &\in \partial \mathcal{B}_p \times \langle 0, \infty \rangle; \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (9)$$

- warunki brzegowe typu geometrycznego:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{X}, t) &= \hat{u}_i(\mathbf{X}, t); \\ (\mathbf{X}, t) &\in \partial \mathcal{B}_u \times \langle 0, \infty \rangle; \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (10)$$

- warunki brzegowe typu termicznego, np. warunek II rodzaju:

$$\begin{aligned} q_i(\mathbf{X}, t) &= \hat{q}_i(\mathbf{X}, t); \\ (\mathbf{X}, t) &\in \partial \mathcal{B}_{T_2} \times \langle 0, \infty \rangle; \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (11)$$

- warunki brzegowe typu dyfuzyjnego, np. warunek II rodzaju:

$$\begin{aligned} \eta_i(\mathbf{X}, t) &= \hat{\eta}_i(\mathbf{X}, t); \\ (\mathbf{X}, t) &\in \partial \mathcal{B}_{C_2} \times \langle 0, \infty \rangle; \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (12)$$

Równania czasopracy wirtualnej

Równania (4) ÷ (7) stanowią układ sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych względem zmiennych przestrzennych i czasu, sformułowany w ramach teorii mechaniki ośrodków ciągłych i termodynamiki procesów nieodwracalnych. W celu rozwiązania zagadnienia termodynamiki sprzężonej z użyciem np. metody elementów czasoprzestrzennych, konieczne jest sformułowanie globalne, obejmujące całe rozpatrywane ciało i cały przedział czasowy. Jednym ze sposobów przekształcenia sformułowania lokalnego w globalne jest zastosowanie metody czasopracy wirtualnej, co wykonuje się przez analogię do równania pracy wirtualnej [2]. Na bazie równań równowagi oraz rozszerzonego równania przewodnictwa cieplnego i dyfuzji, uzyskano następujące równania całkowe:

$$\int_{\mathcal{B}} \delta u_i (\sigma_{ij,j} + \rho f_i - \rho \ddot{u}_i) d\mathcal{B} dt = 0 \quad (13)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \delta g (k \theta_{,ii} - \dot{\theta} c_{e,c} - T_0 (\gamma_T \dot{e} + b \dot{c}) + W) d\mathcal{B} dt = 0 \quad (14)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \delta h (D_c D_T \theta_{,ii} + D_c D_c e_{,ii} + D_c^2 c_{,ii} - D_c \dot{c} + D_c \tau = 0) d\mathcal{B} dt = 0 \quad (15)$$

Następnie w wyrażeniach (13), (14), (15) dokonuje się następujących podstawień:

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} T_0 \dot{g} \quad (16)$$

$$c \stackrel{\text{def}}{=} C_0 h \quad (17)$$

Wielkości δu , δg , δh oznaczają wariacje funkcji u , g , h . Są to funkcje spełniające kinematyczne, termiczne i dyfuzyjne warunki brzegowe oraz odpowiednio różniczkowane po zmiennych przestrzennych i po czasie. Wykorzystując warunki brzegowe (9) ÷ (12), równanie (4) oraz dokonując odpowiednich przekształceń, otrzymuje się równania czasopracy wirtualnej w postaci:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \delta u_i \rho f_i d\mathcal{B} dt - \int_{\mathcal{B}} \delta u_i \rho \dot{u}_i d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{\mathcal{B}} \delta \dot{u}_i \rho \dot{u}_i d\mathcal{B} dt + \\ + \int_{\mathcal{B}} \delta u_i \hat{p}_i d(\partial \mathcal{B}_p) dt - \int_{\mathcal{B}} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\mathcal{B} dt = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \delta g W d\mathcal{B} dt + \int_{\mathcal{B}} \delta g T_0 c_{e,c} \dot{g} d\mathcal{B} dt + \int_{\mathcal{B}} \delta g T_0 C_0 h \dot{h} d\mathcal{B} dt + \\ + \int_{\mathcal{B}} \delta g T_0 \gamma_T e d\mathcal{B} dt - \int_{\mathcal{B}} \delta g_i k T_0 \dot{g}_{,i} d\mathcal{B} dt - \int_{\mathcal{B}} \delta g \hat{q}_i n_i d(\partial \mathcal{B}_T) dt \\ - \int_{\mathcal{B}} \delta g T_0 c_{e,c} \dot{g} d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{\mathcal{B}} \delta g T_0 C_0 h \dot{h} d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{\mathcal{B}} \delta g T_0 \gamma_T e d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \delta h D_c \tau d\mathcal{B} dt - \int_{\mathcal{B}} \delta h_i D_c D_T T_0 \dot{g}_{,i} d\mathcal{B} dt - \int_{\mathcal{B}} \delta h_i D_c D_c e_{,i} d\mathcal{B} dt - \int_{\mathcal{B}} \delta h_i D_c^2 C_0 h_{,i} d\mathcal{B} dt + \\ + \int_{\mathcal{B}} \delta h D_c C_0 h \dot{h} d\mathcal{B} dt - \int_{\mathcal{B}} \delta h D_c \hat{\eta}_i n_i d(\partial \mathcal{B}_C) dt - \int_{\mathcal{B}} \delta h D_c C_0 h \dot{h} d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Poszczególne całki równań (18) ÷ (20) oznaczają czasopracę lub czasoenergię wyrażoną w $J \cdot s = N \cdot m \cdot s$ [1]. Równania (18) ÷ (20) stanowią zasadę czasopracy wirtualnej. Widoczne są sprzężenia odkształceń ε_{ij} , temperatury θ (opisywanej funkcją g) i dyfuzji c (opisywanej funkcją h). Definicję równania czasopracy wirtualnej można rozszerzyć na zagadnienie termodynamiki sprzężonej w następujący sposób: uogólnione siły (pochodzące od oddziaływań zewnętrznych w postaci sił powierzchniowych, wpływów termicznych i dyfuzyjnych) rozłożone na hiperpowierzchni ograniczającej obiekt czasoprzestrzenny oraz siły wewnętrzne (których źródłem są siły masowe, wewnętrzne źródła ciepła i masy), działające w czterowymiarowym obszarze wykonują na wirtualnych wielkościach δu , δg , δh czasopracę równą wewnętrznej czasoenergii zgromadzonej w analizowanym obszarze.

Sposób uogólnienia zasady Hamiltona

Wprowadza się następujące oznaczenia:

- do równania (15):

$$\mathcal{T}_u = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \dot{u}_i \rho \dot{u}_i d\mathcal{B} \quad (21)$$

$$\mathcal{V}_u = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\mathcal{B} \quad (22)$$

$$\mathcal{W}_u = \int_{\mathcal{B}} u_i \rho f_i d\mathcal{B} + \int_{\partial \mathcal{B}_p} u_i \hat{p}_i d(\partial \mathcal{B}_p) \quad (23)$$

■ do równania (16):

$$\mathcal{J}_T = \frac{1}{2} \int_B \dot{g} T_0 c_{\varepsilon,c} \dot{g} dB \quad (24)$$

$$\mathcal{V}_T = \frac{1}{2} \int_B (g_i k T_0 \dot{g}_i - \dot{g} T_0 \gamma_T e - \dot{g} T_0 C_0 b h) dB \quad (25)$$

$$\mathcal{W}_T = \int_B g W dB - \int_{\partial B_T} g \hat{q}_i n_i d(\partial B_T) \quad (26)$$

■ do równania (17):

$$\mathcal{J}_C = \frac{1}{2} \int_B \dot{h} D_C C_0 \dot{h} dB \quad (27)$$

$$\mathcal{V}_C = \frac{1}{2} \int_B h_i (T_0 D_C D_T \dot{g}_i + D_C D_\varepsilon e_i + C_0 D_C^2 h_i) dB \quad (28)$$

$$\mathcal{W}_C = \int_B h D_C \tau dB - \int_{\partial B_C} h D_C \hat{\eta}_i n_i d(\partial B_C) \quad (29)$$

Równania czasopracy wirtualnej przyjmują postać:

$$\delta \chi_u = \int_t \delta (\mathcal{J}_u - \mathcal{V}_u + \frac{1}{2} \mathcal{W}_u) dt - \frac{1}{2} \int_B \delta u_i \rho \dot{u}_i d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (30)$$

$$\delta \chi_T = \int_t \delta (\mathcal{J}_T - \mathcal{V}_T + \frac{1}{2} \mathcal{W}_T) dt - \frac{1}{2} \int_B \delta g (T_0 c_{\varepsilon,c} \dot{g} + T_0 C_0 b h + T_0 \gamma_T e) d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (31)$$

$$\delta \chi_C = \int_t \delta (\mathcal{J}_C - \mathcal{V}_C + \frac{1}{2} \mathcal{W}_C) dt - \frac{1}{2} \int_B \delta h D_C C_0 \dot{h} d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (32)$$

gdzie:

χ – minimalizowany funkcjonal, tzw. funkcja Lagrange’a.

Jeżeli impulsy zewnętrzne (obciążenie, temperatura, dyfuzja) mają charakter zachowawczy (tzn. są niezależne od przemieszczeń, temperatury, dyfuzji rozpatrywanego ośrodka), to równania czasopracy przyjmują postać:

$$\delta \chi_u = \delta \int_t (\mathcal{J}_u - \mathcal{V}_u + \frac{1}{2} \mathcal{W}_u) dt - \frac{1}{2} \int_B \delta u_i \rho \dot{u}_i d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (33)$$

$$\delta \chi_T = \delta \int_t (\mathcal{J}_T - \mathcal{V}_T + \frac{1}{2} \mathcal{W}_T) dt - \frac{1}{2} \int_B \delta g (T_0 c_{\varepsilon,c} \dot{g} + T_0 C_0 b h + T_0 \gamma_T e) d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (34)$$

$$\delta \chi_C = \delta \int_t (\mathcal{J}_C - \mathcal{V}_C + \frac{1}{2} \mathcal{W}_C) dt - \frac{1}{2} \int_B \delta h D_C C_0 \dot{h} d\mathcal{B} \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (35)$$

Przy założeniach, że wariacje δu_i , δg , δh zanikają w chwili t_0 (początek obserwacji) i t_1 (koniec obserwacji, analizy), całka z funkcji Lagrange’a ma postać:

$$\mathcal{L} = \mathcal{J} - \mathcal{V} + 1/2 \mathcal{W} \quad (36)$$

W przedziale czasu t_0, t_1 , wyrażenie to osiąga wartość ekstremalną w przypadku rzeczywistego ruchu względem wszystkich dopuszczalnych przemieszczeń wirtualnych δu_i , temperatury wirtualnej (wyrażonej funkcją δg) i dyfuzji wirtualnej (wyrażonej funkcją δh), zanikających po pierwsze w chwilach t_0 i t_1 we wszystkich punktach ciała i po drugie – na powierzchniach granicznych ∂B_u , ∂B_T , ∂B_C , gdzie przemieszczenia, temperatura (wyrażona przez g) i dyfuzja (wy-

rażona przez h) są dane w ciągu całego okresu $\langle t_0, t_1 \rangle$. Zasada ta oznacza, że wśród wszystkich dynamicznych dróg, które spełniają warunki brzegowe ∂B_u , ∂B_T , ∂B_C w każdej chwili t oraz które zaczynają się i kończą rzeczywistymi warunkami w dwóch dowolnych chwilach t_0 i t_1 w każdym punkcie ciała, rzeczywista droga dynamiczna wyróżnia się wśród innych tym, że funkcja Lagrange’a (36) osiąga ekstremum (minimum).

Podsumowanie

Wykorzystując analogię przedstawioną w monografii Funga [8], Nowackiego [9, 10], Kączkowskiego [11] i Podhoreckiego [2], dokonano rozszerzenia zasady Hamiltona o człony związane z dyfuzją oraz ze sprzężeniem pola mechanicznego, termicznego i dyfuzyjnego.

Równania czasopracy wirtualnej (18) ÷ (20), a więc także zasada Hamiltona (33) ÷ (35) nie dadzą się wyrazić wprost jako minimum dobrze określonego funkcjonału. Wiadomo jednak, że takie sformułowania dopuszczają stosowanie metod bezpośrednich, jak np. metoda elementów czasoprzestrzennych (MECZ) lub dowolna inna metoda do rozwiązywania układu zwyczajnych sprzężonych równań różniczkowych. Z zasady wariacyjnej (18) ÷ (20) można otrzymać równania termodyfuzji sprzężonej w odkształcalnych ośrodkach ciągłych.

Literatura

- [1] Kleiber M. Mechanika techniczna, tom XI, Komputerowe metody mechaniki ciał stałych, PWN, Warszawa 1995.
- [2] Podhorecki A. Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych, Wydawnictwo Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej w Bydgoszczy, Bydgoszcz 2005.
- [3] He J.-H. Hamilton’s principle for dynamical elasticity, Applied Mathematics Letter 2017; 72: 65 – 69.
- [4] Kim J. Extended framework of Hamilton’s principle for thermoelastic continua, Computers & Mathematics with Applications. 2017; 73: 1505 – 1523.
- [5] Kim J, Dargush GF, Lee HS. Extended framework of Hamilton’s principle in heat diffusion, International Journal of Mechanical Sciences. 2016; 114: 166 – 176.
- [6] Marin M, Carrera E, Vlastakis S. An extension of the Hamilton variational principle for piezoelectric bodies with dipolar structure, Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2023; 30: 2453 – 2457.
- [7] Junker P, Balzani D. An extended Hamilton principle as unifying theory for coupled problems and dissipative microstructure evolution. Continuum Mech. Thermodyn. 2021; <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01017-z>.
- [8] Fung YC. Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa 1969.
- [9] Nowacki W. Termosprężystość, Zakład Narodowy Imienia Ossolińskich Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław – Warszawa – Kraków – Gdańsk 1972.
- [10] Nowacki W, Olesiak ZS. Termodyfuzja w ciałach stałych, PWN, Warszawa 1991.
- [11] Kączkowski Z. Metoda elementów czasoprzestrzennych, Komputerowe metody mechaniki ciał stałych, PWN, Warszawa 1995.

Przyjęto do druku: 24.01.2024 r.