

prof. dr hab. inż. Michał Knauff\*)  
dr inż. Marcin Niedospiół<sup>1)</sup>  
ORCID: 0000-0001-9421-3856

# Minimalne zbrojenie ze względu na zarysowanie w betonowych elementach sprężonych

## *Minimum reinforcement areas required to cracking control in prestressed concrete*

DOI: 10.15199/33.2022.10.03

**Streszczenie.** Analizując przykłady obliczeń stwierdzono, że zastosowanie uproszczonej metody wyznaczania minimalnego zbrojenia, opartej na wzorze (2), nie zapewnia wystarczającego ograniczenia szerokości rys w przekrojach wysokich. Zgodnie z punktem 7.3.2 (4) aktualnej normy dotyczącej projektowania w elementach sprężonych nie jest wymagane minimalne zbrojenie w przekrojach, w których pod wpływem charakterystycznej kombinacji obciążeń wartość bezwzględna naprężenia rozciągającego w betonie nie jest większa od wartości granicznej  $\sigma_{ct,p}$  ( $\sigma_{ct,p} \leq f_{ctm}$ ). W artykule wykazano, że w wysokich przekrojach zginanych i we wszystkich przekrojach rozciąganych osiowo tak zaprojektowanych, występuje ryzyko przekroczenia granicznej szerokości rys. Szczególnie narażone na nadmierne zarysowania są elementy rozciągane osiowo i inne elementy, w których nie ma strefy ściskanej. Z tego powodu należy zachować ostrożność przy stosowaniu punktu 7.3.2 (4) i rozważyć ograniczenie naprężeń rozciągających w betonie jako środka zmniejszającego prawdopodobieństwo nadmiernego zarysowania.

**Słowa kluczowe:** minimum zbrojenia; szerokość rys; przekrój betonu sprężonego; zasady projektowania.

**Abstract.** Analyzing examples of calculations, it was found that the use of a simplified method for determining the minimum reinforcement, based on the formula (2), does not provide sufficient control of the crack width in high cross-sections. According to the clause 7.3.2 (4) of the current design standard in prestressed members no minimum reinforcement is required in sections, where under the characteristic combination of loads the absolute value of tensile stress in the concrete is not greater than the limit value of  $\sigma_{ct,p}$  ( $\sigma_{ct,p} \leq f_{ctm}$ ). The article shows that in high sections under bending and in all axially tensioned sections so designed, the crack width may exceed the limit value. Particularly exposed to excessive cracking are elements that are axially tensioned and other elements that do not have a compression zone. For this reason, caution should be exercised when using point 7.3.2 (4) and limiting of the tensile stresses in concrete as a measure to reduce the probability of excessive cracking should be considered.

**Keywords:** minimum reinforcement; crack width; prestressed concrete cross-section; design rules.

W obu aktualnych normach dotyczących projektowania konstrukcji z betonu [1, 2] istotną rolę odgrywają przepisy określające metody obliczania pola przekroju:

- minimalnego zbrojenia rozciąganego, potrzebnego ze względu na kruche zniszczenie;
- minimalnego zbrojenia rozciąganego, potrzebnego ze względu na zarysowanie.

Oba te pola mają w normach jednakowe oznaczenie  $A_{s,min}$ . Przepisy dotyczące  $A_{s,min}$  znajdują się w kilku rozdziałach omawianych norm i dotyczą zarówno elementów żelbetowych, jak i sprężonych. Podstawowe informacje o minimalnym zbrojeniu, ze względu na kruche zniszczenie, znajdują się w rozdziale 9 normy [1] i w punkcie 6.1 (109) normy [2]. Zasady wyznaczania tego minimum omówiono w [3]. W artykule prezentujemy zasady, które dotyczą wyznaczania minimalnego pola zbrojenia ze względu na zarysowanie w elementach sprężonych.

### Skokowa zmiana odkształceń jako źródło przepisów dotyczących minimalnego zbrojenia

Zbrojenie minimalne ze względu na zarysowanie omówiono w obszernym punkcie 7.3.2 normy [1], zatytułowanym *Minimalne pola przekroju zbrojenia*. Oba rodzaje minimalnego zbrojenia mają zapobiec niekorzystnym zjawiskom, które mogą wystąpić przy skokowej zmianie siły w zbrojeniu, związanej ze zmianą z fazy I (przekrój niezarysowany) na II (przekrój zarysowany). W związku z tym oba minima można wyznaczyć wg wspólnych zasad, wynikających z analizy skokowej zmiany odkształceń, która zachodzi, gdy w betonie powstaje rysa. Na tej podstawie może powstać jednolita teoria minimalnego zbrojenia, dotycząca dowolnie obciążonych przekrojów żelbetowych i sprężonych (tzn. zginanych, rozciąganych i ściskanych mimośrodowo, w których znajduje się zbrojenie rozciągane). Zasady ujęte w normach występują w tej teorii jako szczególne przypadki. Podstawy takiej jednolitej teorii omówiono w artykule [3]. Jak wykazano, główne wzory dotyczące obu rozpatrywanych minimów otrzymuje się na podstawie warunków równowagi, porównując moment rysujący (lub siłę rysującą) z momentem (siłą) bezpośrednio po zarysowaniu. Minimum ze względu na kruche zniszczenie

<sup>1)</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej

<sup>\*</sup>) Adres do korespondencji: m.knauff@il.pw.edu.pl

otrzymuje się, zakładając, że bezpośrednio po zarysowaniu naprężenie w zbrojeniu rozciągającym jest równe  $f_{yk}$ . Minimum ze względu na zarysowanie otrzymuje się, przyjmując pole przekroju zbrojenia zapewniające, że pod wpływem momentu rysującego  $M_{cr}$  naprężenie w zbrojeniu po zarysowaniu  $\sigma_s$  będzie mniejsze od  $f_{yk}$ . W przypadku, gdy trzeba ograniczyć szerokość rys, to w elementach zginanych i rozciąganych pole przekroju zbrojenia może być znacznie większe niż minimum wymagane ze względu na kruche zniszczenie. W elementach sprężonych szerokość rys wywołanych przez częstą kombinację oddziaływań ( $M = M_{fr}$ ) nie powinna przekraczać szerokości granicznej, która wynosi 0,2 mm. Ze względu na wymagania dotyczące minimalnego zbrojenia ta granica nie powinna być przekroczona również w przypadku  $M = M_{cr}$ , a więc momentem miarodajnym do obliczenia szerokości rys jest  $\max(M_{fr}, M_{cr})$ . Podstawowe wzory do obliczania momentu rysującego i siły rysującej podano w [3].

### Wyznaczanie minimalnego zbrojenia elementów sprężonych wg normy [1]

W punkcie 7.3.2 normy [1] zatytułowanym *Minimalne pola przekroju zbrojenia* znajdują się wymagania, aby we wszystkich obszarach konstrukcji, w których – jak się oczekuje – może wystąpić zarysowanie, umieszczać zbrojenie o polu przekroju nie mniejszym niż  $A_{s,min}$ . Minimalne pole przekroju  $A_{s,min}$  można wyznaczyć ze wzoru (jeżeli przez dokładniejsze obliczenie nie wykaże się, że wystarczające jest mniejsze pole zbrojenia)

$$A_{s,min} \sigma_s = k_c k_f f_{ct,eff} A_{ct} \quad (1)$$

Wzór (1) wyprowadza się, zakładając, że siła, która powstaje w strefie rozciąganej bezpośrednio przed zarysowaniem, ma być po zarysowaniu przeniesiona przez zbrojenie. Naprężenia w tym zbrojeniu  $\sigma_s$  powinny być na tyle małe, żeby szerokość rys nie przekroczyła szerokości granicznej. Wzór (1) można stosować do wyznaczania zbrojenia potrzebnego ze względu na naprężenia rozciągające wywołane przez obciążenia pośrednie, takie jak odpływ ciepła hydratacji cementu i skurcz betonu. Największy wpływ jednoczesnego działania obu tych zjawisk występuje we wczesnym okresie twardnienia betonu. Można wtedy przyjmować, że efektywna wytrzymałość betonu na rozciąganie  $f_{ct,eff}$  jest mniejsza od wytrzymałości średniej  $f_{ctm}$ . Ten problem dotyczy przede wszystkim konstrukcji żelbetowych i nie będzie omawiany w tym artykule. Zajmiemy się natomiast zastosowaniem wzoru (1) do konstrukcji sprężonych w przypadkach, w których zarysowanie może wystąpić pod wpływem obciążeń bezpośrednich po osiągnięciu planowanej wytrzymałości betonu  $f_{ctm}$ . Wzór (1) przyjmuje wtedy postać:

$$A_{s,min} \sigma_s = k_c f_{ctm} A_{ct} \quad (2)$$

w której  $A_{ct}$  oznacza pole strefy rozciąganej bezpośrednio przed zarysowaniem, a za naprężenie  $\sigma_s$  należy podstawić przyrost naprężeń w zbrojeniu sprężonym lub/i niesprężonym wywołany obciążeniem rysującym. Szczegółowe wyjaśnienia

i przykłady obliczeń dotyczące przypadków, w których minimalne zbrojenie składa się z cięgien sprężających i ze zbrojenia niesprężonego, znajdują się w [4].

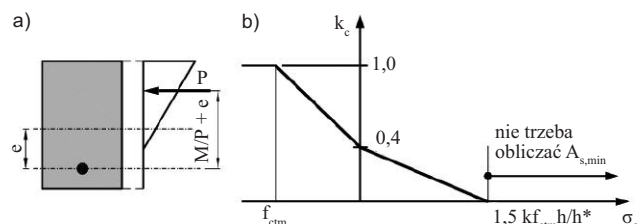
Wzór (2) może służyć do wyznaczania minimalnego zbrojenia ze względu na zarysowanie we wszystkich przypadkach jednoczesnego działania siły podłużnej i momentu zginającego. W celu ścisłego sprawdzenia wymagań dotyczących minimalnego zbrojenia należy:

- założyć pole przekroju zbrojenia;
- obliczyć naprężenia w rozciągającym zbrojeniu i zasięg strefy ściskanej;
- obliczyć szerokość rys (zależną od średnicy prętów zbrojenia) i porównać ją z szerokością graniczną.

Obliczenie naprężeń w zbrojeniu i zasięgu strefy ściskanej w przekrojach zginanych lub rozciąganych z małym mimośrodem jest bardzo proste. W innych przypadkach (elementy sprężone są zwykle mimośrodowo ściskane) takie obliczenie trzeba wykonywać numerycznie. Obliczenie szerokości rys również nie jest proste. Z tego powodu w normie [1] umieszczono przybliżone metody wyznaczania siły w zbrojeniu i średnicy prętów w zależności od naprężenia i granicznej szerokości rys.

W przypadku konstrukcji sprężonych szczególnie istotne jest obliczanie elementów mimośrodowo ściskanych. Dostosowanie wzoru (2) do odpowiedniego rozkładu naprężeń uzyskuje się w normie przez zastosowanie współczynnika oznaczonego przez  $k_c$ , określonego serią wzorów w p. 7.3.2 normy. Można to zilustrować rysunkiem 1, na którym współczynnik  $k_c$  przedstawiono jako funkcję średniego naprężenia  $N_{Ed}/(bh)$ .

W zginanych elementach sprężonych siła podłużna  $N_{Ed}$  jest równa sile sprężającej. Zmienna  $h/h^*$  jest równa  $h$  dla  $h$  mniejszych niż 1 m i wynosi 1 m w przypadku większych wartości  $h$ . Jak widać, przy ściskaniu, czyli gdy  $\sigma_c > 0$ , otrzymuje się wartości  $k_c$  mniejsze niż przy czystym zginaniu. Powoduje to, że wymagane minimalne pole zbrojenia jest mniejsze, a w przypadku  $\sigma_c > 1,5 f_{ctm} h/h^*$  zbrojenie staje się niepotrzebne. W przekroju bez zbrojenia wykres naprężeń normalnych w betonie wywołanych momentem zginającym  $M$  (rozciągającym dolne włókna) i siłą sprężającą  $P$  ma po zarysowaniu postać taką jak na rysunku 1a – ściskana jest tylko górna część przekroju. W [5, 6] przedstawiono uzasadnienie wzoru podobnego do zilustrowanego na rysunku 1b, bazujące na założeniu dotyczącym zasięgu strefy rozciąga-



**Rys. 1.** Naprężenia normalne w sprężonym przekroju betonowym obciążonym momentem  $M$  (a); współczynnik  $k_c$  (b) w zależności od naprężenia średniego wg normy [1]

*Fig. 1.* Normal stresses in a prestressed concrete cross-section under load moment  $M$  (a);  $k_c$  factor depending (b) on the mean stress according to the standard [1]

nej. Jeżeli ten zasięg nie przekracza połowy wysokości przekroju i nie przekracza 0,5 m, to nie mogą pojawić się szerokie rysy, gdyż odkształcenia strefy zarysowanej są ograniczone przez sztywność strefy ściskanej. Taką zasadę przyjęto w najstarszej wersji Eurokodu [6, 7]. Później jednak w normach [1 i 2] zastrzono to wymaganie, żądając, żeby wysokość strefy rozciąganej nie przekraczała jednej trzeciej wysokości przekroju i jednej trzeciej metra.

Jak wykazują obliczenia zamieszczone w artykule, zasada zilustrowana na rysunku 1 nie jest uniwersalna, ponieważ w przypadku przekrojów wysokich szerokość rys może być nadmierna, nawet gdy  $k_c = 0$ . Wzór zilustrowany na rysunku 1b stosuje się do przekrojów prostokątnych i do średników przekrojów teowych oraz skrzynekowych. Do półek takich przekrojów należy stosować inny wzór. Współczynnik  $k_c$  wyznacza się wówczas na podstawie założenia, że półka przenosi 90% siły, która panuje w niej bezpośrednio przed zarysowaniem. W rozdziale 7.3.2 normy [2] umieszczono wyjaśnienia dotyczące definicji średnika i półek w przekrojach teowych i skrzynekowych.

Kilka przykładów obliczeń minimalnego zbrojenia znajduje się w [7], ale do obliczania naprężeń stosuje się tam teorię fazy II i nie omawia zastrzeżeń, na które zwróciliśmy wcześniej uwagę. Wzory zawierające współczynniki  $k_c$  są oczywiście uproszczeniem ściślejszego sposobu obliczania. Do książki [8] dołączono arkusz kalkulacyjny, który może być pomocny w takich obliczeniach. Arkusz służy do ścisłego obliczania naprężeń i szerokości rys w przekrojach żelbetonowych, ale można go zastosować także do obliczenia przyrostu naprężeń wciąganych sprężających, występującego we wzorach na szerokość rys w elementach sprężonych.

Bardzo istotny wpływ na wyniki sprawdzania SG zarysowania może mieć pkt 7.3.2 (4) normy, który wymienia się jako obowiązujący również w normie [2] dotyczącej mostów. 7.3.2 (4) *W elementach sprężonych, w przekrojach, w których pod wpływem charakterystycznej kombinacji obciążeń i charakterystycznej siły sprężającej beton jest ściskany, lub w których wartość bezwzględna naprężenia rozciągającego w betonie nie przekracza  $\sigma_{ct,p}$ , minimalne zbrojenie nie jest potrzebne. Uwaga. Wartość  $\sigma_{ct,p}$  do stosowania w kraju może być podana w Załączniku Krajowym. Wartością zalecaną jest  $f_{ct,eff}$  według 7.3.2 (2).*

Rozpatrując dojrzały element, zakłada się, że  $\sigma_{ct,p} = f_{ctm}$ . Jeżeli pod wpływem charakterystycznej kombinacji oddziaływań (moment zginający  $M = M_{char}$ ) naprężenia rozciągające w betonie nie przekraczają  $f_{ctm}$ , to  $A_{s,min}$  jest zbędne. Wówczas można przyjąć, na podstawie definicji zbrojenia minimalnego, że szerokość rys pod wpływem momentu  $M_{char}$  nie powinna przekraczać 0,2 mm. Tak więc, punkt 7.3.2 (4) normy [1] zezwala na stosowanie metody naprężeń dopuszczalnych, chociaż takie określenie w normie nie jest używane. Rolę dopuszczalnego naprężenia rozciągającego w betonie pełni naprężenie  $\sigma_{ct,p}$ , które może mieścić się w przedziale od zera do  $f_{ctm}$ .

Za pomocą punktu 7.3.2 (4) można wprowadzić do praktyki zdefiniowane w starszych normach wymagania dotyczące naprężeń dopuszczalnych lub „kategorii rysoodporności”, które w aktualnych normach [1 i 2] nie występują. W fib Model

Code 2010 [9] kategorii rysoodporności również nie występują, ale w pkt 7.6 tej normy znajdują się następujące uregulowania: *Ograniczenie naprężeń rozciągających w betonie jest odpowiednim środkiem do zmniejszenia prawdopodobieństwa zarysowania. W zależności od rozpatrywanego stanu granicznego można stosować różne ograniczenia naprężeń. Najistotniejszy jest stan graniczny dekompresji.* Pojęcie „minimalnego zbrojenia ze względu na zarysowanie w [9] nie występuje, a ograniczenia naprężeń, o których mowa w pkt 7.6, nie są konkretnie określone.

W polskich normach starszych niż [1 i 2] podstawowe znaczenie miały naprężenia dopuszczalne (graniczne) i kategorie rysoodporności. Jako przykład ograniczeń nakładanych na naprężenia rozciągające przytaczamy zalecenia polskiej normy [10]. Konstrukcje sprężone, w których pojawienie się rys jest niedopuszczalne (chodzi tu o konstrukcje znajdujące się w środowisku silnie agresywnym), a rysoodporność zabezpieczona jest samym sprężeniem bez uwzględniania współpracy betonu na rozciąganie, zalicza się (ze względu na rysoodporność) do kategorii 1. Wymaganie „zabezpieczenia rysoodporności przez samo sprężenie” uznaje się za spełnione, gdy pod wpływem charakterystycznej kombinacji oddziaływań i siły sprężającej nie występują w betonie naprężenia rozciągające. Wtedy zbrojenie minimalne nie jest potrzebne. Do kategorii 2 zaliczano w [10] konstrukcje sprężone znajdujące się w środowisku średnio agresywnym. W takich konstrukcjach pojawienie się rys jest niedopuszczalne, a rysoodporność zabezpieczona jest przez sprężenie i współpracę betonu na rozciąganie. Wymaganie to uznaje się za spełnione, gdy można wykazać, że pod wpływem *pełnych charakterystycznych obciążeń stałych i zmiennych* oraz siły sprężającej nie pojawią się rysy. Oznacza to, że pod wpływem tych obciążeń naprężenie rozciągające nie powinno przekraczać  $f_{ctk}$  (a nie  $f_{ctm}$  jak w [1]).

W [11] zdefiniowano 4 kategorie rysoodporności konstrukcji (1a, 1b, 2a, 2b) w zależności od zagrożenia stali sprężającej korozją, stanu środowiska zewnętrznego, skutków utraty szczelności i spadku sztywności wywołanych przez ewentualne zarysowanie. Przegląd wymagań dotyczących zarysowania w polskich normach [10, 12 ÷ 15] można znaleźć w [4].

Z przedstawionych informacji wynika, że w normach [1 i 2] związek między wymaganiami i ewentualnymi konsekwencjami przekroczenia wymagań dotyczących zarysowania jest niewystarczająco sprecyzowany, ponieważ nie ma informacji, które były dawniej związane z kategoriami rysoodporności. Niemniej jednak, pkt 7.3.2 (4) normy [1] można dostosować do wymagań, które projektant uzna za niezbędne. Występująca w nim efektywna wytrzymałość betonu na rozciąganie  $f_{ct,eff}$  może bowiem przyjmować wartości od zera do  $f_{ctm}$ . Przyjmując, że naprężenie  $\sigma_{ct,p}$  jest naprężeniem granicznym (nie należy łączyć tego pojęcia z wytrzymałością  $f_{ct,eff}$ , która służy w normie do ewentualnego zmniejszenia zbrojenia niezbędnego ze względu na odkształcenia termiczno-skurczowe) można przyporządkować ograniczenia naprężeń wymaganiom mającym postać kategorii rysoodporności, które powinny być powiązane z kombinacjami oddziaływań. Uważamy, że ogólne zasady metody stanów granicznych wymagają, aby te kom-



binacje oddziaływań były miarodajne do sprawdzania SGU (nie należy w tym przypadku stosować kombinacji podstawowej związanej z SGN). Jeśli są konieczne wyjątkowo ostre wymagania, to można przyjąć jako niewielkie naprężenie ściskające  $\sigma_{ct,p}$ . Z formalnego punktu widzenia byłoby wskazane, żeby zasady, o których mowa, zostały opracowane przez PKN. Wobec braku takich zasad projektant powinien sam rozważyć i ustalić poziom niezbędnych wymagań. Problem poziomu naprężeń rozciągających i szerokości rys może oczywiście stracić na znaczeniu w przypadkach, w których krytyczne jest wymaganie dekompresji.

W wielu przypadkach wymagania dotyczące dekompresji lub nośności granicznej powodują konieczność sprężenia silniejszego niż potrzebne ze względu na zarysowanie. Wtedy szerokość rys schodzi na dalszy plan. W elementach narażonych na działanie środowiska klasy ekspozycji X0 i XC1 nie wymaga się jednak sprawdzania warunku dekompresji, a w środowisku klas XC2 ÷ XC4 wymaganie dekompresji sprawdza się tylko w przypadku quasi-stałej kombinacji oddziaływań. Wtedy ograniczenie szerokości rys powstających pod wpływem kombinacji częstej może okazać się krytyczne.

### Przykłady obliczeń dotyczących minimalnego zbrojenia

We wszystkich przykładach przyjęto beton klasy C50/60:  $f_{cd} = 50/1,4 = 35,7$  MPa;  $f_{cm} = 58$  MPa;  $f_{ctm} = 4,1$  MPa;  $f_{ctk} = 2,9$  MPa;  $E_{cm} = 37000$  MPa, współczynnik pełzania  $\varphi(\infty, t_0) = 2,0$ . Ponadto założono, że zarysowanie następuje w elemencie w pełni dojrzałym, a więc  $\sigma_{ct,p} = f_{ctm}$ .

**Sprężona, płaska płyta stropowa.** Obliczenie płyty jest najprostszym przykładem ilustrującym metodę obliczania elementów zginanych. Norma [1] zezwala na niesprawdzanie wymagań dotyczących zarysowania w żelbetowych i sprężonych płytach o grubości nieprzekraczającej 200 mm, a więc można oczekiwać, że minimalne zbrojenie okaże się zbędne również w rozpatrywanej sprężonej płycie mającej prostokątny przekrój poprzeczny o wysokości  $h = 300$  mm. Obliczenia potwierdzają to przypuszczenie.

Sprężenie składa się z dwudziestu splotów umieszczonych 10 cm od dolnej krawędzi przekroju, a więc mimośród siły sprężającej wynosi 5 cm. Siła sprężająca, miarodajna w sytuacji początkowej, wynosi 2656 kN, a siła miarodajna w sytuacji trwałej 1920 kN. Średnie naprężenie w betonie w sytuacji trwałej wynosi  $1,920/0,30 = 6,4$  MPa i jest większe od  $1,5 \cdot 4,1 \cdot 0,3 = 1,845$  MPa, a więc z wykresu umieszczonego na rysunku 1 wynika, że  $k_c = 0$  i minimalne zbrojenie nie ze względu na zarysowanie można uznać za zbędne.

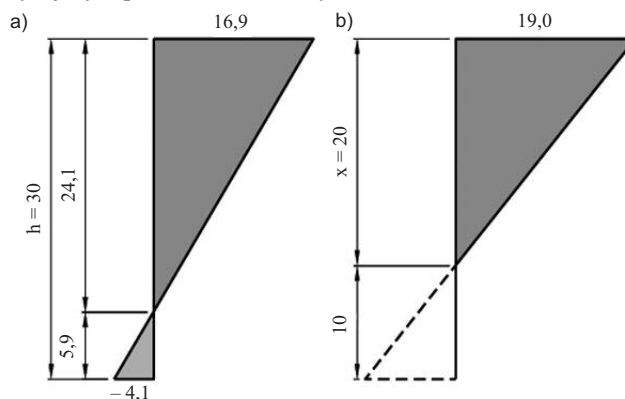
Wskaźnik wytrzymałości przekroju o szerokości 1 m wynosi  $W = 0,32/6 = 0,015$  m<sup>3</sup>, a naprężenia w dolnych włóknach wywołane sprężeniem w sytuacji trwałej:

$$1,92/(0,3 \cdot 1,0) + (1,92 \cdot 0,05)/0,015 = 12,8 \text{ MPa}$$

Moment rysujący  $M_{cr} = (\sigma_{cp} + f_{cm})W = (12,8 + 4,1) \cdot 0,015 \cdot 10^3 = 253,5$  kN · m.

Do obliczenia naprężeń i zasięgu strefy ściskanej  $x$  w fazie II zastosowano arkusz kalkulacyjny nr 1 załączony do książki [8]. Do arkusza podstawiono  $N = 1920$  kN oraz moment zginają-

cy, będący sumą momentu rysującego i momentu wywołanego przez sprężenie, który wynosi  $M = 253,5 - 1920 \cdot 0,05 = 157,5$  kN · m. Wykresy naprężeń wywołanych momentem rysującym przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Naprężenia [MPa] w betonie powstające pod wpływem momentu rysującego: a) bezpośrednio przed zarysowaniem; b) bezpośrednio po zarysowaniu

Fig. 2. Stresses [MPa] in concrete under cracking moment: a) immediately before cracking; b) immediately after cracking

Zbrojenie, umieszczone 10 cm od dolnej krawędzi przekroju, nie mieści się w efektywnym polu rozciągającym  $A_{c,eff}$  (wysokość tego pola nie powinna przekraczać jednej trzeciej wysokości strefy rozciąganej), a zatem przyjęto, że rozstaw rys jest równy:

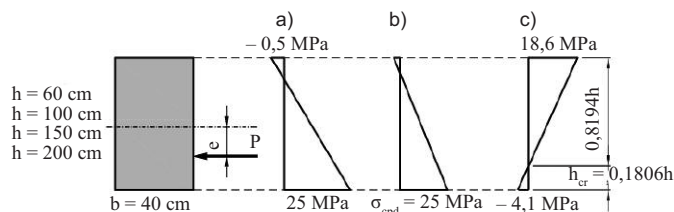
$$s_{r,max} = 1,3(h - x) = 1,3 \cdot (30 - 20) = 13 \text{ cm.}$$

Odskształcenie na poziomie górnej krawędzi wynosi (dla  $E_{c,eff} = 37000/(1 + 2) = 12330$  MPa)  $19,0/12330 = 1,54 \cdot 10^{-3}$ . Z proporcji wynika, że po zarysowaniu odskształcenie dolnej krawędzi jest równe  $0,77 \cdot 10^{-3}$ , a szerokość rys:

$$w_k = \Delta \epsilon s_{r,max} = 0,77 \cdot 130 \cdot 10^{-3} = 0,100 < w_{max} = 0,2 \text{ mm.}$$

Zasadniczy wpływ na wynik tego obliczenia miał mały (mniejszy niż w elementach niesprężonych) zasięg strefy rozciąganej. Jak widać, w sprężonych płytach stropowych zbrojenie minimalne, projektowane ze względu na stan konstrukcji po osiągnięciu przez beton pełnej wytrzymałości, będzie zwykle niepotrzebne. Trzeba tu jednak dodać, że w artykule nie rozpatruje się wpływu skurczu betonu i odpływu ciepła hydratacji, które występują przed sprężeniem i mogą być przyczyną zarysowań na etapie wznoszenia konstrukcji. Z przedstawionego przykładu wynika, że zastosowanie pkt 7.3.2 (4) normy do płyt i niskich belek nie budzi zastrzeżeń. Jak się okaże, nie można go jednak stosować bezkrytycznie do wysokich belek i elementów rozciąganych.

**Belki o różnej wysokości.** Szerokość rys zależy od wysokości strefy rozciąganej. W celu weryfikacji zasad normy rozpatruje się zatem przekroje prostokątne o różnej wysokości (rysunek 3). Sprężenie zaprojektowano w taki sposób, żeby wykresy naprężeń we wszystkich belkach były jednakowe. Bezpośrednio przed zarysowaniem, gdy  $M = M_{cr}$ , naprężenia w betonie w dolnych włóknach są równe  $f_{ctm}$ . Ze względu na naprężenia można zatem uznać te przekroje za „jednakowo sprężone”, ale oczywiście wysokość stref rozciąganej i ściskanej w wyższych przekrojach będzie większa niż w niż-



**Rys. 3. Naprężenia w betonie w „jednakowo sprężonych” przekrojach wywołane: a) sprężeniem w sytuacji początkowej; b) sprężeniem w sytuacji trwałej; c) sprężeniem i momentem rysującym bezpośrednio przed pojawieniem się rysy**

Fig. 3. Stresses in concrete in „equally prestressed” cross-sections: a) due to prestress in the initial situation, b) due to prestress in a permanent situation, c) due to stress and cracking moment immediately before the crack appears

szych, proporcjonalnie do wysokości przekroju. Średnie naprężenie (siła sprężająca podzielona przez pole przekroju) wynosi 7,25 MPa i we wszystkich przypadkach jest większe od  $1,5 f_{ctm} \cdot h/h^*$ , a więc  $k_c = 0$  i z wzoru (1) wynika, że minimalne zbrojenie jest niepotrzebne.

Naprężenia, które powstają bezpośrednio po zarysowaniu, obliczono za pomocą arkusza kalkulacyjnego dołączonego do książki [8]. Przed zarysowaniem naprężenia w betonie zależą wyłącznie od wielkości i położenia wypadkowej siły sprężającej, ale po zarysowaniu istotne znaczenie ma rozmieszczenie cięgien sprężających. W obliczeniach założono, że wszystkie cięgna są skoncentrowane w jednym punkcie, na poziomie wypadkowej siły sprężającej. W związku z tym w efektywnym polu rozciągającym  $A_{c,eff}$  nie ma żadnego zbrojenia i rozstaw rys oblicza się ze wzoru  $s_{r,max} = 1,3 (h - x)$ , w którym  $x$  oznacza zasięg strefy ściskanej bezpośrednio po zarysowaniu. Warto zauważyć, że rozmieszczając cięgna w dwóch grupach, u dołu i u góry przekroju, tak dobranych, żeby wypadkowa pozostała w zaprojektowanym położeniu, można uzyskać mniejszą szerokość rys, gdyż część cięgien sprężających znajdzie się wtedy w  $A_{c,eff}$ .

Obliczona szerokość rys (tabela 1) nie jest jednakowa i wynosi (kolejno od przekroju najniższego do najwyższego) 0,13, 0,21, 0,31 i 0,42 mm. Tak więc, spełnienie wymagania wyrażonego w pkt 7.3.2 (4) normy nie zapewnia zaleconego w tej normie ograniczenia szerokości rys. Przybliżone obliczenie, polegające na zastosowaniu współczynnika  $k_c$  i wzoru (1), też doprowadza do fałszywego wniosku. Jak widać, w przekrojach mających wysokość mniejszą od ok. 1 m szerokość rys jest mniejsza od granicznej, wynoszącej 0,2 mm nawet wtedy, gdy w strefie rozciąganej nie ma żadnego zbrojenia. W elementach wyższych szerokość rys przekracza jed-

**Tabela 1. Przyrost naprężenia w zbrojeniu sprężającym i szerokość rys w przekrojach bez zbrojenia zwykłego**

Table 1. Stress increase in prestressing reinforcement and crack width in cross-sections without normal reinforcement

	Wysokość przekroju [cm]	60	100	150	200
	Moment rysujący [kN·m]	532,8	1480	3330	5921
	Moment zginający [kN·m]	272,3	756,7	1703	3028
	Przyrost naprężenia $\Delta\sigma_p$ [MPa]	ok. 8,5 MPa			
	Rozstaw rys [mm]	211	351	527	703
	Szerokość rys [mm]	0,13	0,21	0,31	0,42

nak graniczną, a w elementach wyższych niż 150 cm przekroczenie granicznej szerokości jest znaczne. Należałoby zatem w pobliżu rozciąganej krawędzi umieścić dodatkowe zbrojenie lub część cięgien sprężających u dołu przekroju i uwzględnić ich wpływ na szerokość rys.

Potrzebne pole przekroju dodatkowego zbrojenia można łatwo obliczyć, stosując arkusz kalkulacyjny. W tabeli 2 przedstawiono szerokość rys obliczoną przy założeniu, że u dołu przekroju znajdują się dodatkowe, niesprężone cztery pręty 8 mm. Jak się okazuje, to bardzo małe zbrojenie, które trzeba zastosować ze względów montażowych, znacznie zmniejsza szerokość rys. Decydujący wpływ na tę szerokość ma położenie zbrojenia (schematycznie przedstawiono je na rysunkach umieszczonych w tabelach 1 i 2).

**Tabela 2. Przyrost naprężenia i szerokość rys w przekrojach ze zbrojeniem zwykłym 4Φ8 przy krawędzi rozciąganej**

Table 2. Stress increase and crack width in cross-sections with 4Φ8 normal reinforcement at the tension edge

	Wysokość przekroju [cm]	60	100	150	200
	Naprężenia $\sigma_s$ [MPa]	85	100	109	113
	Rozstaw rys [mm]	205	348	383	382
	Szerokość rys [mm]	0,05	0,11	0,13	0,13

Często ze względu na wymaganie dekompresji potrzebne jest sprężenie silniejsze niż ze względu na zarysowanie. Wtedy szerokość rys schodzi na dalszy plan. Niemniej jednak w środowisku klas XC2 ÷ XC4 wymaganie dekompresji sprawdza się tylko w przypadku quasi-stałej kombinacji oddziaływań. Wtedy ograniczenie szerokości rys powstających pod wpływem kombinacji częstej może okazać się krytyczne.

**Osiowe rozciąganie.** W przekroju osiowo rozciąganej ściany lub płyty o grubości 0,30 m przyjęto, że zbrojenie sprężające przy każdej powierzchni bocznej składa się 20 splotów ( $A_p = 2 \cdot 20 \cdot 0,93 = 37,2 \text{ cm}^2$ ) oraz że miarodajna siła w jednym splotcie wynosi 0,1328 MN w sytuacji początkowej i 0,096 MN w sytuacji trwałej. Naprężenia w betonie wywołane sprężeniem w sytuacji początkowej:

$$2 \cdot 20 \cdot 0,1328 / 0,3 \cdot 1,0 = 17,71 < 0,6 f_{ctk}(t_0) = 0,6 \cdot 38,4 = 23,04 \text{ MPa.}$$

Naprężenia w betonie wywołane sprężeniem w sytuacji trwałej:

$$\text{siła rysująca } N_{cr} = (\sigma_{cp} + f_{ctm}) A_c = (12,8 + 4,1) \cdot 0,3 = 5,07 \text{ MN.}$$

Jak łatwo obliczyć, nośność graniczna wyznaczona w przypadku charakterystycznej granicy plastyczności zbrojenia wynosi  $2 \cdot 20 \cdot 1674 \cdot 0,93 \cdot 10^{-4} = 6,227 \text{ MN}$  i jest większa od siły rysującej równej 5,07 MN, a więc zagrożenie kruchym zniszczeniem nie występuje. W przypadku, gdy rozciągająca siła podłużna, wywołana charakterystyczną kombinacją oddziaływań, jest mniejsza od  $N_{cr}$ , to zgodnie z pkt 7.3.2 (4) normy zbrojenie minimalne nie jest potrzebne. W przeciwnym przypadku trzeba zastosować zbrojenie minimalne, które ograniczy szerokość rys do 0,2 mm.

Przyrost naprężeń w cięgnach sprężających od stanu, w którym odkształcenie betonu jest zerowe (czyli również naprężenie w cięgnach jest zerowe), do stanu bezpośrednio po zarysowaniu wynosi:

$$\Delta\sigma_p = N_{cr} / A_p = 5,07 / (2 \cdot 20 \cdot 0,93 \cdot 10^{-4}) = 1363 \text{ MPa.}$$

Ten wynik, zupełnie inny niż w elementach zginanych, jest skutkiem braku strefy ściskanej. Przy zginaniu sztywna strefa ściskana uniemożliwia swobodne odkształcenia strefy rozciąganej, a przy osiowym rozciąganiu po zarysowaniu przekroju cała siła rozciągająca jest przenoszona przez zbrojenie. Jak obliczono, w elemencie rozciągany osiowo przy naprężeniu 1363 MPa szerokość rys wynosi ok. 4,5 mm, a więc znacznie przekracza granicę 0,2 mm. Szerokość równą granicznej (0,2 mm) można uzyskać tylko w przypadku znacznie mniejszych wartości  $\Delta\sigma_p$ , stosując oprócz sprężenia bardzo silne zbrojenie niesprężone. Zastosowanie znacznie mniejszego „naprężenia dopuszczalnego”, np. 1,2 MPa, nie spowoduje radykalnej zmiany w wyniku obliczenia szerokości rys, gdyż dla  $\sigma_{ct,p} = 1,2$  MPa

$$N_{cr} = (\sigma_{cp} + f_{ctm})A_c = (12,8 + 1,20) \cdot 0,3 = 4,20 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p = N_{cr}/A_p = 4,20/(40 \cdot 0,93 \cdot 10^{-4}) = 1129 \text{ MPa}$$

Naprężenie powstające w zbrojeniu po zarysowaniu jest więc nadal bardzo duże i jeśli nastąpi zarysowanie, to rysy będą bardzo szerokie. Niemniej jednak, przy założeniu  $\sigma_{ct,p} = 1,2$  MPa wystąpienie zarysowania staje się mało prawdopodobne. Wynika z tego, że elementy rozciągane osiowo lub rozciągane z małym mimośrodem trzeba projektować zakładając, że zarysowanie jest niedopuszczalne, a więc największe naprężenie w betonie powinno być o tyle mniejsze od  $f_{ctm}$ , żeby osiągnięcie  $f_{ctm}$  było mało prawdopodobne. Racjonalnym rozwiązaniem wydaje się przyjęcie  $\sigma_{ct,p} = 0$ .

## Wnioski

Spełnienie wymagania znajdującego się w pkt 7.3.2 (4) normy [1] nie zawsze zapewnia zalecane w tej normie ograniczenie szerokości rys. Przybliżone obliczenie, polegające na zastosowaniu współczynnika  $k_c$  i wzoru (2), też nie zapewnia wystarczającego ograniczenia szerokości rys w wysokich przekrojach. Stosowanie pkt 7.3.2 (4) do płyt i niskich belek nie budzi zastrzeżeń, ale projektując wysokie belki, nie można tego punktu stosować bezkrytycznie. Niemniej jednak, w wysokich belkach niewielkie dodatkowe zbrojenie miękkie wystarcza do spełnienia wymagań normy.

Przy rozciąganiu z małym mimośrodem, inaczej niż przy zginaniu, szerokość rys nie jest ograniczona przez sztywną strefę ściskaną. Po ewentualnym zarysowaniu, spowodowanym osiągnięciem naprężenia równego  $f_{ctm}$ , powstają bardzo szerokie rysy. Ograniczenie ich szerokości można osiągnąć tylko za pomocą niezwykle silnego zbrojenia minimalnego. Praktyczne rozwiązanie powinno zatem polegać na zastosowaniu silnego sprężenia, które spowoduje, że osiągnięcie  $f_{ctm}$  stanie się bardzo mało prawdopodobne, np. można zażądać, żeby naprężenie graniczne  $\sigma_{ct,p}$  było równe zeru lub nawet było niewielkim naprężeniem ściskającym.

W normach [1, 2] nie ma informacji związanych z tą problematyką. Dawniej brano ją pod uwagę przez zdefiniowanie kategorii rysoodporności. Na podstawie pkt 7.3.2 (4) normy [1], przyjmując, że naprężenie  $\sigma_{ct,p}$  jest graniczne (wartości  $\sigma_{ct,p}$  wynoszą od zera do  $f_{ctm}$ ), można przyporządko-

wać ograniczenia naprężeń wymaganiom mającym postać kategorii rysoodporności. Spełnienie wymagań dotyczących zarysowania uzyskuje się wtedy dzięki temu, że pojawienie się rys staje się bardzo mało prawdopodobne. Takie podejście prezentowały starsze normy, w których stosowano „kategorie rysoodporności”. Z tych norm można zaczerpnąć inspirację, ustalając bezpieczny poziom naprężeń rozciągających w betonie. Nie należy jednak, jak w [1 i 2] łączyć wartości  $\sigma_{ct,p}$  z wytrzymałością  $f_{ct,eff}$ , która służy w normie do ewentualnego zmniejszenia zbrojenia niezbędnego ze względu na odkształcenia termiczno-skurczowe wówczas, gdy krytyczna sytuacja występuje przed osiągnięciem przez beton pełnej projektowanej wytrzymałości na rozciąganie.

Z formalnego punktu widzenia byłoby wskazane, żeby omawiane zasady zostały opracowane przez PKN. Wobec braku takich zasad projektant powinien sam rozważyć i ustalić poziom niezbędnych wymagań. Oczywiście, problem poziomu naprężeń rozciągających i szerokości rys może stracić na znaczeniu w przypadkach, w których krytyczne jest wymaganie dekompresji.

## Literatura

- [1] PN-EN 1992-1-1:2008 Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [2] PN-EN 1992-2:2010. Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 2: Mosty z betonu. Obliczanie i reguły konstrukcyjne.
- [3] Knauff M, Niedośpiał M. Minimalne zbrojenie ze względu na kruche wyczerpanie nośności przekrojów żelbetowych i sprężonych. Materiały Budowlane. 2022. DOI: 10.15199/33.2022.10.02.
- [4] Knauff M, Niedośpiał M. Betonowe konstrukcje sprężone w budownictwie ogólnym. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2021.
- [5] Litzner HU. Design of Concrete Structures to ENV 1992 – Eurocode 2, str. 137-308 w Concrete Structures Euro-Design Handbook. Ernst & Sohn 1994/96.
- [6] ENV 1992-1-1. Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-1. General Rules and Rules for Buildings, 1991.
- [7] Eurocode 2. Worked Examples (based on the „Guida all’uso dell’eurocodice 2” by G. Mancini and his team and on background documents prepared by the Eurocode 2 Project Teams Members (A. W. Beeby, H. Corres Peiretti, J. Walraven, B. Westerberg, R. V. Whitman). European Concrete Platform ASBL, June 2008.
- [8] Knauff M, Grzeszykowski B, Golubińska A. Przykłady obliczania konstrukcji żelbetowych. Zeszyt 3. Zarysowanie. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2018.
- [9] fib Model Code for Concrete Structures 2010, Ernst&Sohn, 2013.
- [10] PN-84/B-03264 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie, 1984.
- [11] Ajdukiewicz A, Mames J. Konstrukcje z betonu sprężonego. Polski Cement. 2004.
- [12] PN-57 B/03320 Konstrukcje z betonu sprężonego. Obliczenia statyczne i projektowanie. 1957.
- [13] PN-76/B-03264 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie, 1976.
- [14] PN-B-03264:1999 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. 1999.
- [15] PN-B-03264:2002. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone, obliczenia statyczne i projektowanie.

Przyjęto do druku: 19.09.2022 r.