Artykuł przeglądowy (Review article)

dr inż. Rafał Ostromęcki[1)]

Ręczne wymiarowanie zbrojenia prostokątnych przekrojów mimośrodowo ściskanych – przykłady obliczeń

By-hand dimensioning of rectangular reinforced concrete cross sections subjected to eccentric compression – exemplary solutions

DOI: 10.15199/33.2019.02.12

Streszczenie. W artykule zaprezentowano propozycję metody ręcznych obliczeń przekrojów prostokątnych ściskanych mimośrodowo, stanowiącej alternatywę dla dostępnych w literaturze rozwiązań z wykorzystaniem tablic i nomogramów. Omówiono genezę proponowanych zależności, przedstawiono zestawienie wykorzystywanych do obliczeń wzorów oraz algorytm prowadzenia obliczeń.

Słowa kluczowe: żelbet; ściskanie mimośrodowe; stan graniczny nośności.

Abstract. The method, that allows for autonomic by-hand calculations of rectangular cross sections subjected to eccentric compression, is presented in the article. The proposal is the alternative to those available in the literature and using the charts or tables for the design. The origination of proposed formulae is presented together with the algorithm of leading the calculations.

Keywords: reinforced concrete; eccentric compression; ultimate limit state.

W miesięczniku „Materiały Budowlane” nr 1/2019 str. 88 – 91 zaprezentowana została metoda ręcznego obliczania przekrojów prostokątnych, mimośrodowo ściskanych [2]. Powstała ona z wykorzystaniem podstawowych założeń teorii żelbetu, m.in.: liniowego rozkładu odkształceń w przekroju elementu; równości odkształceń zbrojenia i otaczającego je betonu; braku naprężeń rozciągających w betonie po zarysowaniu; związków konstytutywnych betonu i zbrojenia (tzn. zależności σ-ε), przy czym w przypadku betonu przyjęto proponowaną w Eurokodzie 2 [3] zależność paraboliczno-prostokątną, a w przypadku zbrojenia wykres dwuliniowy, z poziomą gałęzią po uplastycznieniu, bez ograniczenia odkształceń.

Uwzględniono także, zdefiniowane w Eurokodzie 2 [3], dopuszczalne rozkłady odkształceń betonu w strefie ściskanej, wynikające z charakteru zależności σ-ε uzyskiwanej eksperymentalnie w próbie osiowego ściskania. Założenia te zostały szczegółowo omówione w przywołanym numerze czasopisma i zilustrowane odpowiednimi rysunkami. Poza analitycznym rozwiązaniem problemu zaproponowany został algorytm postępowania w przypadku projektowania zbrojenia. Rozróżniono w tym celu dwie możliwości, gdy w przekroju występuje strefa rozciągana (można to nazwać umownie dominacją momentu zginającego) oraz gdy cały przekrój jest ściskany (dominuje siła ściskająca). W pierwszym przypadku zmienną, od której uzależnione są składniki równań równowagi, jest wysokość strefy ściskanej – x, a w drugim odkształcenie mniej ściskanej krawędzi przekroju – ε_b. Obliczenia polegają na sformułowaniu, a następnie rozwiązaniu dwóch równań równowagi – sił oraz momentów i mogą być przeprowadzone przy użyciu kalkulatora. Nie są potrzebne tablice czy nomogramy, z których odczytuje się stosowne współczynniki i wielkości bezwymiarowe. Obliczenia ręczne mają tę zaletę, że mogą być przeprowadzone dla dowolnych wielkości geometrycznych (wymiarów przekroju, grubości otuliny zbrojenia, przy czym otulina nie musi być jednakowa w całym przekroju), dowolnych relacji właściwości wytrzymałościowych materiałów (betonu i stali), czy dowolnych relacji obciążenia. W przypadku zastosowania arkusza kalkulacyjnego lub programu do obliczeń matematycznych mogą być przeprowadzone bardzo sprawnie.

Celem obecnej publikacji jest prezentacja przebiegu obliczeń wg zaproponowanej metody. Podane rozwiązania wyczerpują możliwe warianty zagadnienia, o różnym stopniu pracochłonności, i w zamierzeniu mają stanowić praktyczną pomoc dla inżynierów, którzy obliczenia zechcą przeprowadzić wyłącznie za pomocą kalkulatora lub skorzystają z arkusza kalkulacyjnego. W zaprezentowanych w artykule przykładach przyjęto, że obciążenie siłą osiową N_{Ed} przyłożone jest z mimośrodem e, odmierzanym od środka ciężkości przekroju betonowego. Jest to uzasadnione tym, że w obliczeniach statycznych konstrukcji, czy prowadzonych ręcznie, czy z wykorzystaniem oprogramowania zakłada się właśnie taki przekrój elementu i dla takiego przekroju uzyskuje rozkłady sił wewnętrznych (w obliczeniach statyki liniowej nie uwzględnia się zarysowania czy obecności zbrojenia elementu).

Zbrojenie niesymetryczne przekroju

Przykład 1: zaprojektowanie zbrojenia słupa prostokątnego wg następujących danych:

- obciążenie – N_{Ed} = 4340 kN; M_{Ed} = 120 kNm;
- wymiary – b = 0,30 m; h = 0,45 m; $a_1 = a_2$ = 0,05 m;
- właściwości mechaniczne – f_{cd} = 20 MPa; f_{yd} = 435 MPa; ε_c = 2‰; ε_{cu} = 3,5‰; $\varepsilon_{sy} = f_{yd}/E_s$ = 2,17‰.

1) Politechnika Warszawska; Wydział Inżynierii Lądowej; r.ostromecki@il.pw.edu.pl

Mimośród obciążenia: e = 120/4340 = 0,028 m.

Założono, że cały przekrój jest ściskany, na co wskazuje niewielka wartość mimośrodu obciążenia i przyjęto $\varepsilon_b = \varepsilon_{b'lim}$. $\varepsilon_{b'lim}$ obliczono z zależności $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{sy}$:

$$\varepsilon_{b'lim} + 3{,}5 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_{b'lim}}{2{,}0}\right) \cdot \frac{0{,}45 - 0{,}05}{0{,}45} = 2{,}17 \rightarrow \varepsilon_{b'lim} = 1{,}68‰$$

Obliczenie składników równań równowagi:

● wypadkowa naprężeń strefy ściskanej:

$$F_c = \left(1 - 0{,}19 \cdot \left(1 - \frac{1{,}68}{2}\right)^2\right) \cdot 20000 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}45 = 2686{,}9 \text{ kN}$$

● położenie wypadkowej naprężeń strefy ściskanej:

$$f = \frac{0{,}5 - 0{,}027 \cdot \left(1 - \frac{1{,}68}{2}\right)^2}{1 - 0{,}19 \cdot \left(1 - \frac{1{,}68}{2}\right)^2} \cdot 0{,}45 = 0{,}226 \text{ m}$$

● siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s2}:

$F_{s2} = 435000 \cdot A_{s2}$

$\kappa_{s2} = 1$, gdyż założono powyżej, że zbrojenie A_{s2} uplastycznia się.

● siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s1}:

$$\kappa_{s1} = \frac{1}{2{,}17} \cdot \left(1{,}68 + 3{,}5 \cdot \left(1 - \frac{1{,}68}{2}\right) \cdot \frac{0{,}05}{0{,}45}\right) = 0{,}80$$

$$F_{s1} = 0{,}80 \cdot 435000 \cdot A_{s1} \qquad F_{s1} = 348000 \cdot A_{s1}$$

● odległość e_{s1}:

$$e_{s1} = 0{,}028 + (0{,}5 \cdot 0{,}45 - 0{,}05) = 0{,}20 \text{ m}$$

Równanie równowagi momentów (RRM):

$$4340 \cdot 0{,}20 = 2686{,}9 \cdot (0{,}226 - 0{,}05) + 435000 \cdot A_{s2} \cdot 0{,}35$$

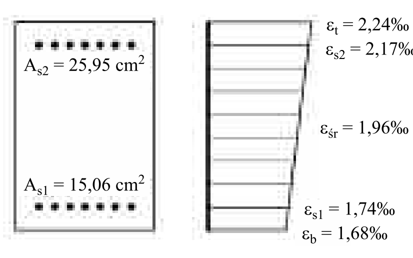
$$A_{s2} = 0{,}002595 \text{ m}^2 = 25{,}95 \text{ cm}^2$$

Równanie równowagi sił (RRS):

$$4340 = 2686{,}9 + 435000 \cdot 0{,}002595 + 348000 \cdot A_{s1}$$

$$A_{s1} = 0{,}001506 \text{ m}^2 = 15{,}06 \text{ cm}^2$$

Rozkład odkształceń przekroju w momencie zniszczenia zobrazowano na rysunku 1.



Rys. 1. Wyniki obliczeń przeprowadzonych w przykładzie 1
Fig. 1. Graphic presentation of example 1 solution

Przykład 2 – zaprojektowanie zbrojenia słupa prostokątnego, wg następujących danych:

● obciążenie – $N_{Ed} = 3980$ kN; $M_{Ed} = 200$ kNm;

● wymiary – b = 0,40 m; h = 0,50 m; $a_1 = a_2 = 0{,}05$ m;

● właściwości mechaniczne – $f_{cd} = 20$ MPa; $f_{yd} = 435$ MPa; $\varepsilon_c = 2‰$; $\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$; $\varepsilon_{sy} = f_{yd}/E_s = 2{,}17‰$.

Mimośród obciążenia: e = 200/3980 = 0,05 m.

Założono, że cały przekrój jest ściskany (wskazuje na to mała wartość mimośrodu) i przyjęto wstępnie $\varepsilon_b = \varepsilon_{b'lim}$. Po przeprowadzeniu obliczeń analogicznych jak w przykładzie 1, otrzymano z równania równowagi momentów (RRM):

$$A_{s2} = 0{,}001117 \text{ m}^2 = 11{,}17 \text{ cm}^2.$$

Rozwiązanie równania równowagi sił (RRS) prowadzi natomiast do wyniku, który nie ma fizycznego sensu: $A_{s1} < 0$

Ujemna wartość pola zbrojenia A_{s1} oznacza, że należy inaczej sformułować równania równowagi. Tym razem, w dalszym ciągu zakładając, że cały przekrój jest ściskany, przyjęto do obliczeń $A_{s1} = 0$ ($F_{s1} = 0$):

● wypadkowa naprężeń strefy ściskanej:

$$F_c = \left(1 - 0{,}19 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{2}\right)^2\right) \cdot 20000 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}50$$

$$F_c = 3240 + 760 \cdot \varepsilon_b - 190 \cdot \varepsilon_b^2$$

● składnik równania równowagi momentów $F_c \cdot f$:

$$F_c \cdot f = \left(0{,}5 - C \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_c}\right)^2\right) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h^2$$

$$F_c \cdot f = \left(0{,}5 - 0{,}027 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{2}\right)^2\right) \cdot 20000 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}50^2 = 946 + 54 \cdot \varepsilon_b - 13{,}5 \cdot \varepsilon_b^2$$

Z równania równowagi sił można wyznaczyć F_{s2} i podstawić następnie do równania równowagi momentów celem znalezienia ε_b ($F_{s1} = 0$):

$$\text{RRS: } N_{Ed} = F_c + F_{s1} + F_{s2} \rightarrow F_{s2} = N_{Ed} - F_c$$

$$\text{RRM: } N_{Ed} \cdot e_{s1} = F_c \cdot (f - a_1) + (N_{Ed} - F_c) \cdot d_s$$

$$\rightarrow N_{Ed} \cdot (e_{s1} - d_s) = F_c \cdot f - F_c \cdot (d_s + a_1)$$

Podstawiając wartości liczbowe RRM można rozwiązać:

$$3980 \cdot (0{,}25 - 0{,}40) = 946 + 54 \cdot \varepsilon_b - 13{,}5 \cdot \varepsilon_b + -(3240 + 760 \cdot \varepsilon_b - 190 \cdot \varepsilon_b^2) \cdot (0{,}40 + 0{,}05)$$

$$72 \cdot \varepsilon_b^2 - 288 \cdot \varepsilon_b + 85 = 0 \rightarrow \varepsilon_b = 0{,}32$$

Dalsze obliczenia nie przedstawiają problemu:

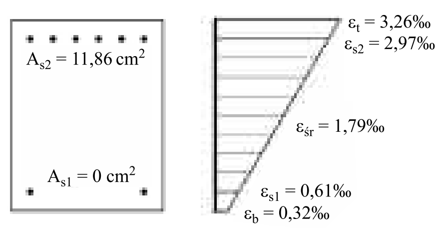
$$F_c = 3240 + 760 \cdot 0{,}32 - 190 \cdot 0{,}32^2 = 3464 \text{ kN}$$

$$F_{s2} = 3980 - 3464 = 516 \text{ kN}$$

$$\kappa_{s2} = \frac{1}{2{,}17} \cdot \left(0{,}32 + 3{,}5 \cdot \left(1 - \frac{0{,}32}{2}\right) \cdot \frac{0{,}50 - 0{,}05}{0{,}50}\right) = 1{,}36 \rightarrow \kappa_{s2} = 1$$

$$A_{s2} \cdot 435000 = 516 \rightarrow A_{s2} = 0{,}001186 \text{ m}^2 = 11{,}86 \text{ m}^2.$$

Zbrojenie A_{s1} należy przyjąć konstrukcyjnie. Można je uwzględnić w obliczeniach, ale wtedy staną się one bardziej pracochłonne. Praktyczniejsze jest opisane postępowanie. Rozkład odkształceń przekroju w momencie zniszczenia przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Wyniki obliczeń przeprowadzonych w przykładzie 2 (w praktyce zbrojenie A_{s1} należy przyjąć konstrukcyjnie)
Fig. 2. Graphic presentation of example 2 solution (area of reinforcement A_{s1} assumed finally is to fulfill construction requirements)

Przykład 3 – zaprojektowanie zbrojenia słupa prostokątnego wg następujących danych:

● obciążenie – N_{Ed} = 7200 kN; M_{Ed} = 180 kNm;

● wymiary – b = 0,40 m; h = 0,60 m; a_1 = 0,05 m; a_2 = 0,07 m (dwa rzędy);

● właściwości mechaniczne – f_{cd} = 20 MPa; f_{yd} = 435 MPa; ε_c = 2‰; ε_{cu} = 3,5‰; $\varepsilon_{sy} = f_{yd}/E_s$ = 2,17‰.

Mimośród obciążenia wynosi: e = 180/7200 = 0,025 m.

Założono, że cały przekrój jest ściskany i przyjęto $\varepsilon_b = \varepsilon_c$ (0,05 · d = 0,028 m > e = 0,025 m).

Obliczenie składników równań równowagi:

● wypadkowa naprężeń strefy ściskanej:

$$F_c = 1,0 \cdot 20000 \cdot 0,40 \cdot 0,60 = 4800 \text{ kN};$$

● położenie wypadkowej naprężeń strefy ściskanej:

$$f = 0,5 \cdot 0,60 = 0,30 \text{ m};$$

● siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s2}:

$$\kappa_{s2} = 2/2,17 = 0,92;\ F_{s2} = 0,92 \cdot 435000 \cdot A_{s2} = 400200 \cdot A_{s2};$$

● siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s1}:

$$\kappa_{s1} = 2/2,17 = 0,92;\ F_{s1} = 0,92 \cdot 435000 \cdot A_{s2} = 400200 \cdot A_{s2};$$

● odległość e_{s1}:

$$e_{s1} = 0,025 + (0,5 \cdot 0,50 - 0,05) = 0,275 \text{ m}.$$

Równanie równowagi momentów (RRM):

$$7200 \cdot 0,275 = 4800 \cdot (0,30 - 0,05) + 400200 \cdot A_{s2} \cdot 0,48;$$

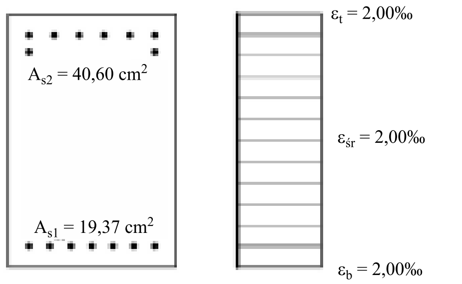
$$A_{s2} = 0,004060 \text{ m}^2 = 40,60 \text{ cm}^2.$$

Równanie równowagi sił (RRS):

$$7200 = 4800 + 400200 \cdot 0,004060 + 400200 \cdot A_{s1};$$

$$A_{s1} = 0,001937 \text{ m}^2 = 19,37 \text{ cm}^2.$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Wyniki obliczeń przeprowadzonych w przykładzie 3
Fig. 3. Graphic presentation of example 3 solution

Przykład 4 – zaprojektowanie zbrojenia słupa prostokątnego wg następujących danych:

● obciążenie – N_{Ed} = 2760 kN; M_{Ed} = 460 kNm;

● wymiary – b = 0,50 m; h = 0,50 m; $a_1 = a_2$ = 0,05 m;

● właściwości mechaniczne – f_{cd} = 20 MPa; f_{yd} = 435 MPa; ε_c = 2‰; ε_{cu} = 3,5‰; $\varepsilon_{sy} = f_{yd}/E_s$ = 2,17‰.

Mimośród obciążenia: e = 460/2760 = 0,167 m.

Ze względu na znaczny mimośród obciążenia założono, że w przekroju wystąpi strefa rozciągana. Do obliczeń przyjęto $x = x_{lim}$.

$$x_{lim} = \frac{3,5}{3,5 + 2,17} \cdot 0,45 = 0,28 \text{ m}$$

Obliczenie składników równań równowagi:

● wypadkowa naprężeń strefy ściskanej:

$$F_c = 0,81 \cdot 20000 \cdot 0,50 \cdot 0,28 = 2268 \text{ kN};$$

● położenie wypadkowej naprężeń strefy ściskanej:

$$g = 0,42 \cdot 0,28 = 0,12 \text{ m};$$

● siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s2}:

$$\kappa_{s2} = 1;\ F_{s2} = 435000 \cdot A_{s2};$$

● siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s1}:

$$\kappa_{s1} = -1;\ F_{s1} = -435000 \cdot A_{s2};$$

● odległość e_{s1}:

$$e_{s1} = 0,167 + (0,5 \cdot 0,50 - 0,05) = 0,367 \text{ m}.$$

Równanie równowagi momentów (RRM):

$$2760 \cdot 0,367 = 2268 \cdot (0,45 - 0,12) + 435000 \cdot A_{s2} \cdot 0,40;$$

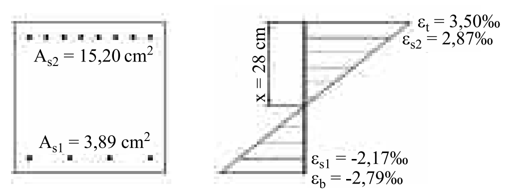
$$A_{s2} = 0,001520 \text{ m}^2 = 15,20 \text{ cm}^2.$$

Równanie równowagi sił (RRS):

$$2760 = 2268 + 435000 \cdot 0,001520 - 435000 \cdot A_{s1};$$

$$A_{s1} = 0,000389 \text{ m}^2 = 3,89 \text{ cm}^2.$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Wyniki obliczeń przeprowadzonych w przykładzie 4
Fig. 4. Graphic presentation of example 4 solution

Przykład 5 – zaprojektowanie zbrojenia słupa prostokątnego wg następujących danych:

● obciążenie – N_{Ed} = 4200 kN; M_{Ed} = 420 kNm;

● wymiary – b = 0,50 m; h = 0,55 m; $a_1 = a_2$ = 0,05 m;

● właściwości mechaniczne – f_{cd} = 20 MPa; f_{yd} = 435 MPa; ε_c = 2‰; ε_{cu} = 3,5‰; $\varepsilon_{sy} = f_{yd}/E_s$ = 2,17‰.

Mimośród obciążenia: e = 420/4200 = 0,10.

Ze względu na znaczny mimośród obciążenia założono, że w przekroju wystąpi strefa rozciągana. Przyjęto do obliczeń $x = x_{lim}$.

$$x_{lim} = \frac{3,5}{3,5 + 2,17} \cdot 0,50 = 0,31 \text{ m}$$

Postępując w sposób analogiczny jak w przykładzie 4, otrzyma się z równania równowagi momentów (RRM):

$$A_{s2} = 0,002270 \text{ m}^2 = 22,70 \text{ cm}^2.$$

Równanie równowagi sił prowadzi natomiast do wyniku, który nie ma sensu fizycznego: $A_{s1} < 0$. Taki wynik oznacza, że należy zmienić założenie i obliczenia przeprowadzić jeszcze raz. Przyjęto tym razem $A_{s1} = 0$. Do wyznaczenia zostaje zatem x oraz A_{s1}.

Obliczenie składników równań równowagi:

● wypadkowa naprężeń strefy ściskanej:

$$F_c = 0,81 \cdot 20000 \cdot 0,50 \cdot x = 8100 \cdot x;$$

● położenie wypadkowej naprężeń strefy ściskanej:

$$g = 0,42 \cdot x;$$

● siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s2}:

$$\kappa_{s2} = 1;\ F_{s2} = 435000 \cdot A_{s2};$$

● siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s1}:

$$F_{s1} = 0.$$

Z równania równowagi sił (RRS) otrzymuje się:

$$N_{Ed} = F_c + F_{s1} + F_{s2} \rightarrow F_{s2} = N_{Ed} - F_c$$

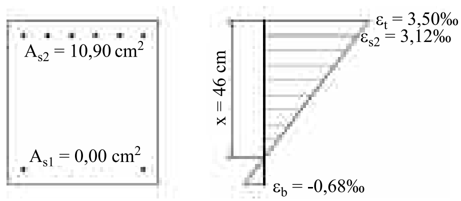
co można wykorzystać w równaniu równowagi momentów (RRM):

$$4200 \cdot 0{,}325 = 8100 \cdot x \cdot (0{,}50 - 0{,}42 \cdot x) + (4200 - 8100 \cdot x) \cdot 0{,}45;$$
$$3402 \cdot x^2 - 405 \cdot x - 525 = 0$$
$$x = 0{,}46 \text{ m}$$

Wyznaczona wartość wysokości strefy ściskanej jest większa niż $\beta \cdot a_2 = 0{,}13$ m, co oznacza, że przyjęcie $\kappa_{s2} = 1$ było właściwe. Mieści się również x w wysokości przekroju. Rozwiązanie ma zatem sens fizyczny.

$$F_{s2} = 4200 - 8100 \cdot 0{,}46 = 435000 \cdot A_{s2};$$
$$A_{s2} = 0{,}001090 \text{ m}^2 = 10{,}90 \text{ cm}^2.$$

Zbrojenie A_{s1} należy przyjąć konstrukcyjnie. Możliwe jest wykonanie obliczeń przy założonym minimalnym A_{s1}. Wówczas uzyskany wynik będzie najbardziej ekonomiczny (A_{s2} będzie nieco mniejsze niż obliczone). Rozwiązanie równań równowagi przysporzy jednak więcej pracy. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5. Wyniki obliczeń przeprowadzonych w przykładzie 5 (w praktyce zbrojenie A_{s1} należy przyjąć konstrukcyjnie)
Fig. 5. Graphic presentation of example 5 solution (area of reinforcement A_{s1} assumed finally is to fulfill construction requirements)

Przykład 6 – zaprojektowanie zbrojenia słupa prostokątnego wg następujących danych:

- obciążenie – $N_{Ed} = 420$ kN; $M_{Ed} = 460$ kNm;
- wymiary – $b = 0{,}50$ m; $h = 0{,}55$ m; $a_1 = a_2 = 0{,}05$ m;
- właściwości mechaniczne – $f_{cd} = 20$ MPa; $f_{yd} = 435$ MPa; $\varepsilon_c = 2‰$; $\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$; $\varepsilon_{sy} = f_{yd}/E_s = 2{,}17‰$.

Mimośród obciążenia: e = 420/460 = 0,91 m.

Założono, że w przekroju wystąpi strefa rozciągana i przyjęto $x = x_{lim}$.

$$x_{lim} = 0{,}31 \text{ m}.$$

Postępując jak w przykładzie 4, uzyskuje się z równania równowagi momentów (RRM): $A_{s2} < 0$.

Taki wynik oznacza konieczność zmiany założeń i powtórnych obliczeń. Zalecane jest przyjęcie $A_{s2} = 0$.

Obliczenie składników równań równowagi:

- wypadkowa naprężeń strefy ściskanej:

$$F_c = 0{,}81 \cdot 20000 \cdot 0{,}50 \cdot x = 8100 \cdot x;$$

- położenie wypadkowej naprężeń strefy ściskanej: $g = 0{,}42 \cdot x$;
- siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s2}: $F_{s2} = 0$;
- siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s1}:

$$\kappa_{s1} = -1;\ F_{s1} = -435000 \cdot A_{s1};$$

Z równania równowagi momentów (RRM) otrzymuje się:

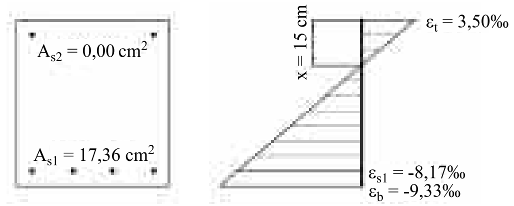
$$460 \cdot 1{,}135 = 8100 \cdot x \cdot (0{,}50 - 0{,}42 \cdot x);$$
$$3402 \cdot x^2 - 4050 \cdot x - 522 = 0;\ x = 0{,}15 \text{ m}.$$

Wartość x nie przekracza x_{lim}, co oznacza, że przyjęcie $\kappa_{s1} = -1$ było właściwe.

Z równania równowagi sił (RRS) obliczyć można:

$$460 = 8100 \cdot 0{,}15 - 335000 \cdot A_{s1};$$
$$A_{s1} = 0{,}001736 \text{ m}^2 = 17{,}36 \text{ cm}^2.$$

Zbrojenie A_{s2} należy przyjąć konstrukcyjnie. Podobnie jak w przykładzie 5 można uwzględnić w obliczeniach minimalne zbrojenie A_{s2}, uzyskując bardziej ekonomiczny wynik, ale przy większym nakładzie pracy wymaganej do rozwiązania zadania. Bardziej praktyczne jest opisane wcześniej postępowanie. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 6.



Rys. 6. Wyniki obliczeń przeprowadzonych w przykładzie 6 (w praktyce zbrojenie A_{s2} należy przyjąć konstrukcyjnie)
Fig. 6. Graphic presentation of example 6 solution (area of reinforcement A_{s2} assumed finally is to fulfill construction requirements)

Zbrojenie symetryczne

Na przykładzie 7 i 8 przedstawię sposób rozwiązania przykładów 1 i 4 z założeniem zbrojenia symetrycznego.

Przykład 7 – zaprojektowanie symetrycznego zbrojenia słupa prostokątnego wg danych przyjętych w przykładzie 1:

- obciążenie – $N_{Ed} = 4340$ kN; $M_{Ed} = 120$ kNm;
- wymiary – $b = 0{,}30$ m; $h = 0{,}45$ m; $a_1 = a_2 = 0{,}05$ m;
- właściwości mechaniczne – $f_{cd} = 20$ MPa; $f_{yd} = 435$ MPa; $\varepsilon_c = 2‰$; $\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$; $\varepsilon_{sy} = 2{,}17‰$.

Mimośród obciążenia: e = 0,028 m.

Założono, że cały przekrój jest ściskany i przyjęto $A_{s1} = A_{s2}$.

- wypadkowa naprężeń strefy ściskanej:

$$F_c = \left(1 - 0{,}19 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{2}\right)^2\right) \cdot 20000 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}45$$

$$F_c = 2187 + 513 \cdot \varepsilon_b - 128{,}3 \cdot \varepsilon_b^2;$$

- wartość składnika $F_c \cdot f$:

$$F_c \cdot f = \left(0{,}5 - 0{,}027 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{2}\right)^2\right) \cdot 20000 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}45^2$$

$$F_c \cdot f = 574{,}7 + 32{,}8 \cdot \varepsilon_b - 8{,}2 \cdot \varepsilon_b^2;$$

- siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s2} (założono $\kappa_{s2} = 1$):

$$F_{s2} = 435000 \cdot A_{s1};$$

- siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s1}:

$$\kappa_{s1} = \frac{1}{2{,}17} \cdot \left(\varepsilon_b + 3{,}5 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{2}\right) \cdot \frac{0{,}05}{0{,}45}\right) \quad \kappa_{s1} = 0{,}37 \cdot \varepsilon_b + 0{,}18$$

$$F_{s1} = (0{,}37 \cdot \varepsilon_b + 0{,}18) \cdot 435000 \cdot A_{s1};$$

- odległość $e_{s1} = 0{,}20$ m.

Równanie równowagi momentów (RRM):

$$N_{Ed} \cdot e_{s1} = F_c \cdot (f - a_1) + F_{s2} \cdot d_s \rightarrow N_{Ed} \cdot e_{s1} = F_c \cdot f - F_c \cdot a_1 + F_{s2} \cdot d_s$$
$$4340 \cdot 0{,}20 = (574{,}7 + 32{,}8 \cdot \varepsilon_b - 8{,}2 \cdot \varepsilon_b^2) - (2187 + $$
$$+ 513 \cdot \varepsilon_b - 128{,}3 \cdot \varepsilon_b^2) \cdot 0{,}05 + 435000 \cdot A_{s1} \cdot 0{,}35;$$
$$A_{s1} = (415{,}7 - 7{,}2 \cdot \varepsilon_b + 0{,}18 \cdot \varepsilon_b^2) \cdot 1/152250.$$

Równanie równowagi sił (RRS):

$$4340 = 2187 + 513 \cdot \varepsilon_b - 128{,}3 \cdot \varepsilon_b^2 + 435000 \cdot A_{s1} +$$
$$+ 435000 \cdot A_{s1} \cdot (0{,}37 \cdot \varepsilon_b + 0{,}18);$$
$$128{,}3 \cdot \varepsilon_b - 513 \cdot \varepsilon_b - 2153 = 435000 \cdot A_{s1} \cdot (0{,}37 \cdot \varepsilon_b + 1{,}18).$$

Wartość A_{s1} wyznaczoną z RRM podstawia się do RRS, uzyskując:

$1{,}9 \cdot \varepsilon_b^3 - 129{,}8 \cdot \varepsilon_b^2 + 929{,}5 \cdot \varepsilon_b - 752{,}9 = 0 \rightarrow \varepsilon_b = 0{,}93‰$.

Obliczenie pola przekroju zbrojenia, gdy znane jest odkształcenie ε_b:

$$A_{s1} = A_{s2} = (415{,}7 - 7{,}2 \cdot 0{,}93 + 1{,}8 \cdot 0{,}93^2)/152250;$$
$$A_{s1} = A_{s2} = 0{,}002696 \text{ m}^2 = 26{,}96 \text{ cm}^2.$$

Z porównania obliczeń z przykładów 1 i 7 wynika, że wartości A_{s2} są zbliżone. Możliwe jest zatem przeprowadzenie obliczeń przy założeniu zbrojenia niesymetrycznego (łatwiejsze rachunki), a następnie zastosowanie większego z uzyskanych pól zbrojenia po obu stronach przekroju. Postępowanie takie stanowi praktyczną alternatywę dla obliczeń ze zbrojeniem symetrycznym.

Przykład 8 – zaprojektowanie symetrycznego zbrojenia słupa prostokątnego wg danych przyjętych w przykładzie 4:

- obciążenie – $N_{Ed} = 2760$ kN; $M_{Ed} = 460$ kNm;
- wymiary – $b = 0{,}50$ m; $h = 0{,}50$ m; $a_1 = a_2 = 0{,}05$ m;
- właściwości mechaniczne – $f_{cd} = 20$ MPa; $f_{yd} = 435$ MPa; $\varepsilon_c = 2‰$; $\varepsilon_{cu} = 3{,}5‰$; $\varepsilon_{sy} = 2{,}17‰$.

Mimośród obciążenia: $e = 0{,}167$ m; $x_{lim} = 0{,}28$ m.

Obliczenie składników równań równowagi:

- wypadkowa naprężeń strefy ściskanej: $F_c = 8100 \cdot x$;
- położenie wypadkowej naprężeń strefy ściskanej: $g = 0{,}42 \cdot x$;
- siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s2} (założono $x \geq \beta \cdot a_2$):

$$\kappa_{s2} = 1;\ F_{s2} = 435000 \cdot A_{s1};$$

- siła wypadkowa w zbrojeniu A_{s1}:

$$\kappa_{s1} = -\frac{3{,}5}{2{,}17} \cdot \left(\frac{0{,}45}{x} - 1\right)$$

$$F_{s1} = -\left(1{,}61 - \frac{0{,}73}{x}\right) \cdot 435000 \cdot A_{s1}$$

- odległość $e_{s1} = 0{,}367$ m.

Równanie równowagi momentów (RRM):

$$2760 \cdot 0{,}367 = 8100 \cdot x \cdot (0{,}45 - 0{,}42 \cdot x) + 435000 \cdot A_{s1} \cdot 0{,}40$$
$$A_{s1} = 1/174000 \cdot (3402 \cdot x^2 - 3645 \cdot x + 1012{,}9).$$

Równanie równowagi sił (RRS):

$$2760 = 8100 \cdot x + 435000 \cdot A_{s1} + \left(1{,}61 - \frac{0{,}73}{x}\right) \cdot 435000 \cdot A_{s1}$$

$$2760 \cdot x - 8100 \cdot x^2 = (2{,}61 \cdot x - 0{,}73) \cdot 435000 \cdot A_{s1}.$$

Podstawiając RRM do RRS:

$$2760 \cdot x - 8100 \cdot x^2 = (2{,}61 \cdot x - 0{,}73) \cdot \frac{435000}{174000} \cdot \left(3402 \cdot x^2 - 3645 \cdot x + 1012{,}9\right)$$

$$8879{,}2 \cdot x^3 - 8757 \cdot x^2 + 4200 \cdot x - 739{,}4 = 0 \rightarrow x = 0{,}32 \text{ m}.$$

Wynik jest zgodny z założeniami ($x > x_{lim}$). Można zatem obliczyć pole przekroju zbrojenia:

$$A_{s1} = 1/174000 \cdot (3402 \cdot 0{,}32^2 - 3645 \cdot 0{,}32 + 1012{,}9);$$
$$A_{s1} = A_{s2} = 0{,}001120 \text{ m}^2 = 11{,}20 \text{ cm}^2.$$

Obliczenie zbrojenia symetrycznego jest, jak widać, nieco bardziej kłopotliwe niż niesymetrycznego (wymaga rozwiązania równania trzeciego stopnia). Możliwe jest jednak postępowanie jak w poprzednim przykładzie i obliczenie pola przekroju prętów, a następnie odpowiednie przyjęcie zbrojenia po obu stronach przekroju.

Wnioski

Ręczne obliczanie wymaganego zbrojenia mimośrodowo ściskanych przekrojów prostokątnych zgodnie z wymaganiami norm nie stanowi większego problemu. W niektórych przypadkach, gdy konieczna jest zmiana przyjętych wstępnie założeń i powtórzenie obliczeń, zwiększa się jednak nakład pracy. Z drugiej strony obliczenia mogą zostać zautomatyzowane z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego lub programu pozwalającego na prowadzenie obliczeń matematycznych. Wtedy ich wykonanie będzie bardzo sprawne, również przy dużej liczbie projektowanych elementów. Zaletą metody jest możliwość przyjmowania dowolnych właściwości stali i betonu, dowolnych relacji wymiarów przekroju, czy położenia zbrojenia w przekroju. Można w obliczeniach uwzględnić zbrojenie umieszczone nie tylko przy krawędziach, ale także na dowolnej wysokości w przekroju. Można zaprojektować zbrojenie niesymetryczne lub symetryczne, w zależności od potrzeby, choć w tym drugim przypadku nakład pracy może być nieco większy. Wszystkie obliczane wielkości mają łatwy do zrozumienia sens fizyczny – nie są to wielkości bezwymiarowe. Eliminuje się konieczność każdorazowego korzystania z tablic do wymiarowania i dokonywania odczytów, co przy większej liczbie projektowanych elementów może być niewygodne. Wynik nie jest obarczony niedokładnością odczytu z nomogramów, nie ma także konieczności dokonania wyboru, gdy jeden z parametrów różni się od wartości, dla której stworzono nomogram, np. w przykładzie 7 uzyskano wynik $A_{s1} = A_{s2} = 26{,}96$ cm^2. Stosując nomogramy zawarte w [1], należy wybrać pomiędzy krzywymi wykreślonymi dla stosunku a/d wynoszącego 0,10 lub 0,15 (w przykładzie ten stosunek wynosi 0,125), otrzymując odpowiednio $A_{s1} = A_{s2} = 24{,}89$ cm^2 lub $A_{s1} = A_{s2} = 26{,}48$ cm^2. Do inżyniera projektanta należeć będzie decyzja, czy przyjąć wartość większą, czy średnią z oszacowanych.

Istotnym aspektem metody jest informacja dotycząca rozkładu odkształceń w przekroju w momencie osiągnięcia stanu granicznego nośności. Rozszerzając zastosowanie metody na przekroje teowe lub dwuteowe (należy w tym celu odpowiednio sformułować warunki równowagi), można uzyskać informację o rozkładzie odkształceń w półkach i określić średnie odkształcenie tych części przekroju w momencie zniszczenia. Sprawdzenia takiego wymagają zapisy Eurokodu 2 [3].

Przy odpowiednim doborze odkształceń granicznych można uwzględnić w obliczeniach korzystny wpływ na nośność elementu skrępowania betonu, związanego ze stosowaniem zbrojenia poprzecznego w postaci uzwojenia. Stosowne zależności pozwalające obliczyć te odkształcenia graniczne są dostępne w Eurokodzie 2 [3].

Literatura

[1] Knauff Michał. 2013.*Obliczanie konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2*. Wydawnictwo Naukowe PWN.

[2] Ostromęcki Rafał. 2019. „Ręczne" wymiarowanie zbrojenia prostokątnych przekrojów mimośrodowo ściskanych. *Materiały Budowlane* 557 (1): 88-91. DOI: 10.15199/33.2019.01.18.

[3] PN-EN 1992-1-1:2008. Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.

Przyjęto do druku: 03.01.2019 r.